

九州大学工学部・学生員 前浜 光爾 正員 初井 和朗

正員 神野 健二 正員 上田 年比古

まえがき 乱流中の単一粒子の挙動は乱れの特性量であるエネルギー散逸率, 微分・積分特性距離, フルモゴロフのミクروسケールと粒子の比重, 粒子径などの関係で概略把握されているが¹⁾, 低波数から高波数領域にわたる乱れエネルギー分布の時間的減衰過程で粒子の運動特性を吟味した研究はあまりないようである。ここではその第一歩として, Patterson²⁾が行なった一様等方性乱流のシミュレーション法を参考にして乱れの流速の計算につき2.3の検討結果を述べる。

基礎式 非圧縮性流体場として周期的

境界条件を満足する一辺 L の立方体を仮定すれば例えば流速 $U(x, t)$ については, (6)式のようなフーリエ展開が可能となり, (1), (2)式は(7), (8), (9)式と変形できる。同様に(3)式は(10)式となる。また(4)式のDivergenceをとって, フーリエ変換を行なうことにより(11)式が得られる。

数値計算について

(1)数値計算を行なう立方体について

コンピュータの記憶容量の制限とF.F.T.の計算時間節約のため, 立方体中のグリッド数は $32 \times 32 \times 32$ とした。また立方体の一辺 L は $\pi \text{ cm}$ とした。これにより生成される波数空間は $k = 2\pi/L$ 。これ(これは整数ベクトルで $-16 \leq k_i < 16$)より $-32 \leq k < 32$ である。

(2)初期乱れの場の発生と計算結果

初期乱れの場は初期エネルギーベクトル $\hat{E}(k, 0)$ を与えて正規乱数を発生させることにより求まる。初期エネルギーベクトル形状決定のための条件として, 数値計算を行なう波数領域内の低波数領域と高波数領域においてエネルギーが十分に減衰していることと, 今後の計算結果と

Hintze³⁾の文献とが比較できることがあり, (13)式はこの条件を満足する。初期乱れの場のフーリエ変換である $\hat{U}_\alpha(k)$ は(17)式により決定する。ここで $\mathcal{V}(k)$, $\mathcal{S}(k)$ は(14), (15), (16)式を満足する平均ゼロの正規乱数である。 $P_{\alpha\beta}(k)$ は(18)式で示され, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタである。決定された $U_\alpha(k)$ は異なる波数間での統計的直交性を表わす(19)式, 波数空間のエネルギー分布を表わす(20)式, 連続式である(20)式, 共役条件を表わす(22)式をすべて満足する。数値計算上での問題点としては i) 初期乱れの場のエネルギーベクトル決定のための(24)式における k_0 及び Δk の選定 ii) 正規乱数発生時の初期値の選定 iii) 共役条件(22)式の, 使用するF.F.T.プログラムのデータフォーマットへの適合が考えられる。i)では各 k_0 で表わされるシエル中のグリッド個数の総和が k_0^2 の定数倍に近

表-1 計算に必要な式

<基礎式>

$$\partial U(x, t) / \partial t - \nu \nabla^2 U(x, t) = \mathcal{S}(x, t) - \nabla(P(x, t) + E(x, t)) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot U(x, t) = 0 \quad (2) \quad \omega(x, t) = \nabla \times U(x, t) \quad (3)$$

$$\mathcal{S}(x, t) = U(x, t) \times \omega(x, t) \quad (4) \quad E(x, t) = \frac{1}{2} \cdot U(x, t) \cdot U(x, t) \quad (5)$$

$$U(x, t) = \sum_{all \ k} \hat{U}(k, t) \exp(i k \cdot x) \quad (6)$$

$$d \hat{U}(k, t) / dt + \nu k^2 \hat{U}(k, t) = \hat{\mathcal{C}}(k, t) \quad (7) \quad k \cdot \hat{U}(k, t) = 0 \quad (8)$$

$$\hat{\mathcal{C}}(k, t) = -k^2 \{ k \times (k \times \mathcal{S}(k, t)) \} \quad (9) \quad \hat{\omega}(k, t) = i k \times \hat{U}(k, t) \quad (10)$$

$$\hat{P}(k, t) = -i k^2 k \mathcal{S}(k, t) - \hat{E}(k, t) \quad (11)$$

$$\hat{U}(k, t + \Delta t) = (\hat{U}(k, t) + \Delta t \cdot \hat{\mathcal{C}}(k, t)) / (1 + \Delta t \cdot \nu k^2) \quad (12)$$

<初期乱れの場の発生に用いる式>

$$\hat{E}(k, 0) = 16 (2/\pi)^{1/2} \nu^2 k_{peak}^{-5} k^4 \exp\{-2(k/k_{peak})^2\} \quad (13)$$

$$\langle \hat{U}_\alpha(k) \cdot \hat{Y}_\beta(k') \rangle = \langle \hat{S}_\alpha(k) \cdot \hat{S}_\beta(k') \rangle = 0 \quad (k \neq k') \quad (14)$$

$$\langle \hat{Y}_\alpha(k) \cdot \hat{Y}_\beta(k) \rangle = \langle \hat{S}_\alpha(k) \cdot \hat{S}_\beta(k) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \{ L^3 \hat{E}(k) / (16\pi k^2) \} \quad (15)$$

$$\langle \hat{Y}_\alpha(k) \cdot \hat{S}_\beta(k') \rangle = 0 \quad (16)$$

$$\hat{U}_\alpha(k) = P_{\alpha\beta}(k) \{ \hat{Y}_\beta(k) + \hat{Y}_\beta(-k) + i \hat{S}_\beta(k) - i \hat{S}_\beta(-k) \} \quad (17)$$

$$P_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \quad (18)$$

$$\langle \hat{U}_\alpha(k) \cdot \hat{U}_\beta(k') \rangle = 0 \quad k \neq k' \quad (19) \quad k_\alpha \hat{U}_\alpha(k) = 0 \quad (20)$$

$$\langle \hat{U}_\alpha(k) \cdot \hat{U}_\beta(-k) \rangle = (L^3/4\pi) \{ \hat{E}(k) / k^2 \} P_{\alpha\beta}(k) \quad (21)$$

$$\hat{U}_\alpha(k) = [\hat{U}_\alpha(-k)]^* \quad (22)$$

<乱れの場の特性量の計算式>

$$\nu^2 \cdot f(r) = 2 \int_0^\infty \hat{E}(k) (\sin kr / kr - \cos kr) / k^2 r^2 dk \quad (23)$$

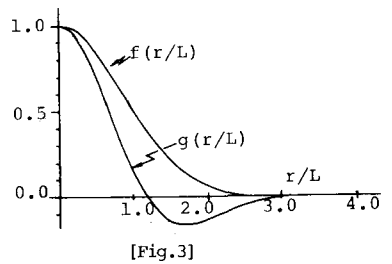
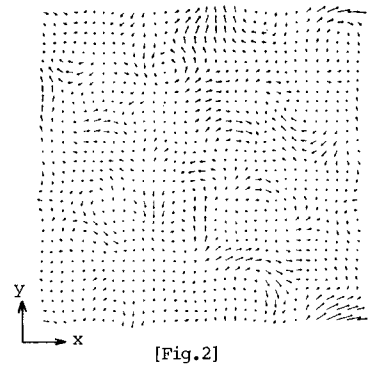
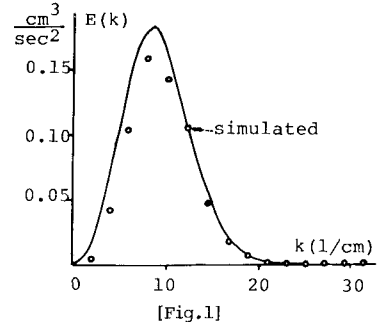
$$g(r) = f(r) + r/2 \cdot \partial f(r) / \partial r \quad (24)$$

$$L(t) = \pi / (2 \cdot \nu k^2) \cdot \int_0^\infty \hat{E}(k, t) / k dk \quad (25)$$

$$\lambda(t) = \{ 15 \nu U(t)^2 / E(t) \}^{1/2} \quad (26) \quad E(t) = 2 \nu \int_0^\infty k^2 \hat{E}(k, t) dk \quad (27)$$

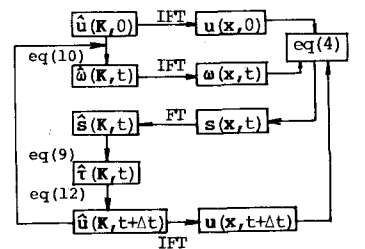
$$\hat{E}(k) = \frac{1}{(2 \cdot \Delta k)} \cdot \sum_{k_0 - \Delta k \leq k < k_0 + \Delta k} \frac{1}{2} \hat{U}_\alpha(k) \hat{U}_\alpha(-k) \quad (28)$$

づくよう k_0 と k_1 を選定する。これにより $2\Delta k$ の厚さをもつシェルの単位表面積当りのグリッド個数を一定値に近づけることができる。ii)では(28)式により求められるエネルギースペクトル形が(4)式に近づくような正規乱数の初期値を選定する。iii)今回の数値計算に用いるフーリエ変換式は $U_j = \sum_{|k| \leq K} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x_j} \quad (j=0, \dots, 2K-1) \quad (x_j = 2\pi j / 2K)$ で、波数領域の定義は $-K \leq k < K$ であるのに対し、一般のF.F.T.プログラムでは $A_j = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2\pi i n j / N} \quad (j=0, \dots, N-1)$ を採用している。したがって一般のF.F.T.プログラムを利用する場合、波数長の範囲を適合させなければならない。今、 $N=2K$ とし、 $k' = k + K, a_{k'} = \hat{u}(k)$ とすれば上式は $U_j = (-1)^j \sum_{k'=0}^{N-1} a_{k'} e^{2\pi i k' j / N}$ となる。フーリエ変換に関しては $\hat{u}(k) = 1/N \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{-2\pi i k j / N} \quad (|k| < K)$ となる。ここで $0 \leq k < K$ に対して $k' = k$ であり、 $-K \leq k < 0$ に対して $k' = k + N$ である。以上の変更によって共役条件(28)式は $a_{k'} = a_{N-k'}^* \quad (0 < k' < N)$, $a_0 = a_0^*$ となり使用するF.F.T.プログラムのデータフォーマットに従って共役条件を成立させることが必要となる。次に初期場の計算結果をFig. 1へに示している。Fig. 1は仮定した初期エネルギースペクトル形(43)式と発生させた乱れの場合について(28)式により求めた計算結果との対比である。これは上記i), ii)の誤差を考慮すればほぼ妥当な計算結果である。Fig. 2は $Z = L/2$ cmでの $x-y$ 方向のフローパターンである。Fig. 3は(28)式で求めた $\hat{E}(k)$ を補間した関数形を用いて(23),(24)式より $f(r)$ と $g(r)$ を計算したものである。(なお補間しない場合には $f(r)$ に周期性が生じ負の値をとることがある。) また(25),(26),(27)式より $L = 0.229$ cm, $\lambda = 0.091$ cm, $\epsilon = 9.467$ cm²/sec³であった。



(3)非定常計算について 上記の手法により発生した初期乱れの場合のフーリエ変換 $\hat{u}(k,0)$ をフーリエ逆変換した $u(x,0)$ と、 $\hat{u}(k,0)$ を(4)式に代入して得られる $\hat{\omega}(k,0)$ のフーリエ逆変換 $\omega(x,0)$ を用いて(4)式により $s(x,0)$ を求める。 $s(x,0)$ のフーリエ変換 $\hat{s}(k,0)$ を用いて(9)式により $\hat{\tau}(k,0)$ を求める。 $\hat{\tau}(k,0)$ と $\hat{u}(k,0)$ を用いて(23)式より次の時間ステップの $\hat{u}(k,0+\Delta t)$ を求める。 $\hat{u}(k,0+\Delta t)$ をフーリエ逆変換して $u(x,0+\Delta t)$ を求める。この計算を繰り返すことにより乱れの場合は時間について前進計算される。計算過程のフローチャートをFig. 4に示す。

あとがき 今回は一樣等方位性乱流における初期乱れ場を波数空間で発生させる問題を検討したにとどまったが、減衰過程における乱れの特性量が時間的に数値計算されればそのような流体場での離散微細粒子の沈降、成層化過程における運動特性についても数値計算できると考えられる。



FT; Fourier Transform
IFT; Inverse Fourier Transform
[Fig.4]

参考文献 1) J.O. Hintze, Turbulent Fluid and Particle Interaction, Progress in Heat and Mass Transfer (1971) pp433-452 2) U. Shumann & G.S. Patterson, Numerical study of pressure and velocity fluctuations in nearly isotropic turbulence, J. Fluid Mech. (1978) vol. 88 part 4 pp685-709 3) S.A. Orszag, Numerical methods for the simulation of turbulence, Highspeed computing in fluid dynamics (1969) pp 250-257 4) S.A. Orszag, Numerical Simulation of incompressible flows within simple boundaries, Studies in applied mathematics (1971) pp293-327 5) 乱流 (髙友正著) 槇書店版 6) SSL-II (九大C P U ライブラリー)