

神戸大学工学部 正 員 箕 原 亮
神戸大学大学院 学生員 西本 靖

1. まえがき 密度の異なる流体が共存する場合、単一流体に比べて密度差に起因する特異な流れが見られる。本研究においては密度 ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) の2流体が界面を形成し層状をなし、相対的に速度差を持つような成層密度流を対象とし、静止した下部層(塩水層)に上部層(淡水層)が流入する時の上下境界面における界面内部波の位相速度、増幅率の解析を実行した。

2. 理論式の誘導 対象とする流体を非圧縮、非拡散、非粘性の仮定の下に取扱い、線型近似、ブーシネス近似が成立すると考える。また運動を2次元に限定し対象とする界面に沿った流れ方向にx軸の正を取り、鉛直上向きにz軸の正を取る。ここに平均量および変動量を bar の有無で表すと重力ベクトル、速度ベクトル、流体密度、圧力はそれぞれ $\bar{g} = (0, -g, 0)$, $\bar{u} = (\bar{u}(z) + u(x, z, t), \bar{w}(x, z, t))$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z) + \rho(x, z, t)$, $\bar{p} = \bar{p}(z) + p(x, z, t)$ で表される。このような条件下で線型化された運動方程式、連続方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1), \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} g \quad (2), \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

流速の変動成分に対して流れ関数 $\psi(x, z, t)$ を導入すると u, w は $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ で表され式(1)~(3)より $p, \bar{\rho}$ を消去する。境界面における波動運動が正弦波として周期的であると仮定し流れ関数を $\psi(x, z, t) = \psi(z) \exp[ik(x - ct)]$ で表されると仮定すると ψ に関して整理して次式を得る。

ここに、 k : 実数の波数、 $c = c_r + ic_i$: 複素波速である。また以後 Prime は $\partial/\partial z$ を表すものとする。

$$(\bar{\rho} \psi')' - \left\{ \bar{\rho} \bar{u} + \frac{(\bar{\rho} \bar{u})'}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{\rho}'}{(\bar{u} - c)^2} g \right\} \psi = 0 \quad (4)$$

境界条件は一般に境界面上層、下層の物理量に u, l の添字を付して表すと w の連続性および $DC(p_u - p_d)/dt = 0$ から ψ の表示を用いて式(5), (6)を得る。

$$\psi_u = \psi_d \quad \text{or,} \quad [\bar{\rho}(c - \bar{u})\psi(z) - \bar{\rho}\{g - (c - \bar{u})\bar{u}\}\psi(z)]_u = [\bar{\rho}(c - \bar{u})\psi(z) - \bar{\rho}\{g - (c - \bar{u})\bar{u}\}\psi(z)]_d \quad (5)$$

本研究の密度流モデルとしては下部層の流速は上部層の影響を受け界面に近づくほど増加すると考えた岩崎・日下の2層モデルを参照し、厚さ h_0 の中間遷移層を設けた図-1に示す3層モデルについて考えるものとする。

流速分布に関してはこの遷移層内の流速分布は上下両界面での流速を u_0, u_1 として u_0 から u_1 に連続的に変化し、下部層との界面においては速度勾配も連続であるとする。また上部層、下部層、中間遷移層をそれぞれI, II, III層とする。各層における物理量に1, 2, 3の添字を付して表し各層の平均流速分布については式(7)~(9)を用いた。

$$\bar{u}_1(z) = -u_{10} \left(\frac{h_1 - z}{h_1 + \alpha} \right)^2 + u_{10} \quad (7), \quad \bar{u}_3(z) = u_{30} \frac{h_2 + z}{h_2 - h_3} \quad (8),$$

$$\bar{u}_2(z) = \frac{1}{h_2^2} \left\{ u_{30} - u_{20} \frac{h_2}{h_2 - h_3} \right\} z^2 + \frac{1}{h_2} \left\{ 2u_{30} \frac{h_2}{h_2 - h_3} - u_{20} \right\} z + u_{20} \quad (9)$$

密度分布については内部波が碎波に至るまで密度混合は起らないと考えまた各層内で一定であると考えて ρ_1, ρ_2, ρ_3 は $\rho_1 < \rho_2, \rho_2 = \rho_3$ であるとする。

I-III層間に生ずる内部波については微小振幅の規則波、 $\eta = a \exp[ik(x - ct)]$ を仮定する。ここに、 a : 内部波

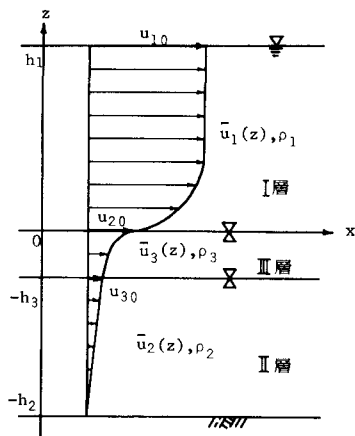


図-1 本研究のモデル

の振幅である。また水面波は存在せず、水底は不透水層であるとする。

図-1に示す密度流モデルに対して基礎式、境界条件を適用するとこの密度流モデルを支配する基礎式(10)~(12)、I-III層間の界面における力学的条件式(13)を得る。また水面条件、水底条件は式(14)、(15)で表される。

$$\varphi_1'' - \left(\beta^2 + \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_s - c} \right) \varphi_1 = 0 \quad (10), \quad \varphi_2'' - \beta^2 \varphi_2 = 0 \quad (11), \quad \varphi_3'' - \left(\beta^2 + \frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_s - c} \right) \varphi_3 = 0 \quad (12),$$

$$\beta_1(c - u_{s0})^2 \varphi_1' - \beta_1 \{ g - (c - u_{s0}) \bar{u}_s \} \varphi_1 = \beta_2(c - u_{s0})^2 \varphi_2' - \beta_2 \{ g - (c - u_{s0}) \bar{u}_s \} \varphi_2 \quad (z=0) \quad (13),$$

$$\varphi_1(\eta_1) = 0 \quad (14), \quad \varphi_2(\eta_2) = 0 \quad (15)$$

基礎式(10),(12)の解法にはHeisenbergの解法を採用し、式(10),(12)の一般解はHeisenbergの解法の2次近似までとする。境界条件として水面条件、水底条件、I-III層間の界面における運動学的条件、II-III層間の界面条件を考慮し式(10)~(12)を解くと次式を得る。

$$\varphi_1(z) = a(\bar{u}_s - c) \left\{ 1 + \beta^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz \right\} - a(\bar{u}_s - c) \frac{1}{F_1(c)} \left\{ \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz + \beta^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz \right\} \quad (16),$$

$$\varphi_2(z) = (u_{s0} - c) \sinh \beta(\eta_2 + z) / \sinh \beta(\eta_2 - \eta_1) \quad (17),$$

$$\varphi_3(z) = \frac{a}{F_2(c)} (\bar{u}_s - c) \left\{ 1 + \beta^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz \right\} + \frac{F_3(c)}{F_2(c)} a(\bar{u}_s - c) \left\{ \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz + \beta^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz \right\} \quad (18)$$

ここに、 $F_1(c)$, $F_2(c)$, $F_3(c)$ は次式で定義される。

$$\frac{1}{F_1(c)} = \frac{1 + \beta^2 \int_0^{\eta_1} (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz}{\int_0^{\eta_1} (\bar{u}_s - c)^2 dz + \beta^2 \int_0^{\eta_1} (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz} \quad (19),$$

$$F_2(c) = \left\{ 1 + \beta^2 \int_0^{\eta_2} (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz \right\} + \left\{ \int_0^{\eta_2} (\bar{u}_s - c)^2 dz + \beta^2 \int_0^{\eta_2} (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz \right\} \times \\ \times (u_{s0} - c) \{ (u_{s0} - c) \beta \coth \beta(\eta_2 - \eta_1) - \bar{u}_s(-\eta_1) \} \quad (20),$$

$$F_3(c) = (u_{s0} - c) \{ (u_{s0} - c) \beta \coth \beta(\eta_2 - \eta_1) - \bar{u}_s(-\eta_1) \} \quad (21)$$

故に式(13)に式(16),(17)を代入して整理すると最終的に次式を得る。

$$\beta_1 \frac{1}{F_1(c)} + \beta_1 g - \beta_2 g + \beta_2 \frac{1}{F_2(c)} \left[\beta^2 \int_0^{\eta_2} (\bar{u}_s - c)^2 dz + F_3(c) \left\{ 1 + \beta^2 \int_0^{\eta_2} (\bar{u}_s - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_s - c)^2 dz dz \right\} \right] = 0 \quad (22)$$

3. 計算方法・計算結果 式(22)の $1/F_1(c)$ を直接数値積分することは相当な計算時間を必要とするのでここでは $1/F_1(c)$ については近似解法を採用した。他の部分は台形公式を用い直接数値積分を実行した。

既知量としては次の水理量を用いた計算結果を表-1,2に示した。

$$\eta_1 = \eta_2 = 10 \text{ cm}, \quad \eta_3 = 0.1, 0.5, 1.0, \quad \beta_1 = 1.0005, \quad \beta_2 = 1.0205$$

$$\text{平均流量: } 4.68 \text{ cm/s, 波長: } 3.18 \text{ cm, 重力加速度: } 980 \text{ cm/s}^2$$

4. 結論 内部波の位相速度は一般に遷移層厚 η_3 および u_{s0}/u_{s0} が大きいか小さくなる。増幅率は u_{s0}/u_{s0} が大きいか小さくなるが、遷移層厚 η_3 との関係は表-1と表-2では逆の関係が見られる。本研究では内部波の位相速度、増幅率と遷移層との関係を若干明らかにしたが、今後はさらに詳細な研究が必要であると考えられる。

参考文献 1) 岩崎敏夫・日下理: 炎塩二層流界面における内部波の発生に関する研究, 工学会第26回年次学術講演会講演集第II部 PP129-132, 1971. 2) 浜田徳一: 密度流の問題(3) 第15回海岸工学講演会講演集, PP180-184, 1968.

表-1 計算結果 ($\alpha=0.5$ $\beta=3$)

h_3	u_{30}/u_{20}	0.1	0.5	0.9
0.1	Cr	2.777	2.936	3.089
	Ci	0.1508	0.1499	0.1476
0.5	Cr	2.948	3.047	3.147
	Ci	0.1537	0.1526	0.1511

表-2 計算結果 ($\alpha=0.7$ $\beta=5$)

h_3	u_{30}/u_{20}	0.1	0.5	0.9
0.1	Cr	3.140	3.447	3.739
	Ci	0.0853	0.0745	0.0611
0.5	Cr	3.445	3.630	3.816
	Ci	0.0756	0.0679	0.0595
1.0	Cr	-	3.806	-
	Ci	-	0.0649	-