

日立造船(株) 正 員 伊地 昭一郎
神戸大学工学部 正 員 篁 源亮

1. まえがき

密度流の問題として重要である界面抵抗係数は、理論的実験的に数多くの研究がなされている。しかし、未だ統一적인見解が得られていない状況である。そこで本研究は、界面に安定な界面波が存在している場合について、界面波に沿う粘性境界層内の渦度分布に注目し、界面抵抗係数を理論的に導き、各種の実験・観測資料と比較検討したものである。

2. 基礎方程式とその解および界面抵抗係数の算定式

流れは2次元とし、座標系 (x, y) は内部波速 c とともに移動する移動座標系とする。 x 軸は流れ方向に水平にとり、 y 軸は鉛直上方を正とする。また上下両層流体に関する諸量は、図-1のごとく定める。さらに問題を簡単にするため2層間の混合は非常に弱いものとし、層流抵抗は界面波の形成に伴う粘性損失による抵抗と比べて十分小さいものとする。次に必要とする渦度方程式および連続式は次のように与えられる。

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{u}, \omega, \nu$ は流速ベクトル、渦度、動粘性係数である。また自由に運動する境界面の場合、平均境界面における境界条件を用いることは十分満足のいくものではないので、 (x, y) 平面を次の等角写像を用いて曲線座標 (ξ, η) 平面に写像する。

$$\xi = x + ae^{-ky} \sin kx, \quad \eta = y - ae^{-ky} \cos kx, \quad J = 1 + 2ake^{-ky} \cos kx + \dots \quad (3)$$

ここに a, k, J は界面波の振幅、波数、変換のヤコビアンである。式(2)を変換すると次式となる。

$$J \cdot \{ \partial (J^{-1/2} u) / \partial \xi + \partial (J^{-1/2} v) / \partial \eta \} = 0 \quad (4)$$

ここに u, v は流速の ξ, η 成分である。上式より流れ関数 ψ は次式により定義される。

$$u = J^{1/2} \partial \psi / \partial \eta, \quad v = -J^{1/2} \partial \psi / \partial \xi \quad (5)$$

さらに式(1)を変換すると次式の支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right) \dots (6)$$

$$\omega = -J \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \dots (7)$$

ここで上式を解くために、流れ関数 ψ を次式のように摂動展開すると渦度も同様の摂動展開形で表される。

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \dots \quad (\epsilon = ak) \quad (8)$$

また ψ_0 には非粘性の解を用い、 ψ_1 は次式のように非粘性成分 ψ_{1w} と粘性成分 ψ_{1v} との和であるとする。

$$\psi_1 = \psi_{1w} + \psi_{1v} \quad (9)$$

1) 非粘性解 Kelvin-Helmholtzの解を座標変換し、 ϵ の各次数ごとにまとめると次式が得られる。

$$\epsilon^0: \psi_0 = (U_1 - c)\eta \dots (10) \quad \epsilon^1: \psi_{1w} = \frac{U_1 - c}{k} \left\{ e^{-k\eta} + \frac{\sinh k(\eta - h_1)}{\sinh kh_1} \right\} \cos k\xi \quad (11)$$

2) 粘性解 式(6)、(8)、(11)および $\partial^2 / \partial \eta^2 \gg \partial^2 / \partial \xi^2$ より次式が得られる。

$$\epsilon^1: (U_1 - c) \partial \omega_1 / \partial \xi = \nu \partial^2 \omega_1 / \partial \eta^2 \quad (12)$$

次に境界条件について考える。界面波上に上層流が存在する場合、界面における応力は一様でなく、波の変位と同位相に変化していることより、界面上の接線応力は次式で与えられる。

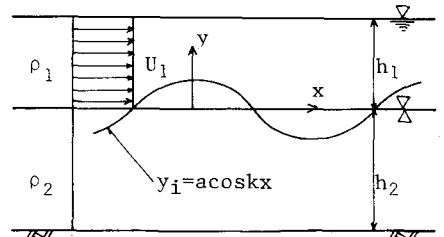


図-1 密度流モデル

$$\tau_1 = \tau' \cos \xi = -\mu \{ (J^{1/2} \partial \psi_1 / \partial \eta) / \partial \eta - (J^{1/2} \partial \psi_1 / \partial \xi) / \partial \xi \} \quad (n=0) \quad (13)$$

上式に(9)、(11)、 $\omega_1 = -3^2 \psi_1 v / \partial \eta^2$ を代入すると結局、境界条件として次式を得る。

$$\eta=0: \omega_1 = \frac{\tau'}{\mu} \cos \xi + \frac{ak^2 e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} (c-U_1) \cos 2k\xi + \frac{ak^2 e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} (c-U_1), \quad \eta=\infty: \omega_1=0 \quad (14)$$

この境界条件のもとに式(11)を解くと次式となる。

$$\omega_1 = \frac{\tau'}{\mu} e^{-\beta \eta} \cos(k\xi + \beta \eta) + \frac{ak^2 e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} (c-U_1) e^{-\sqrt{2} \beta \eta} \cos(2k\xi + \sqrt{2} \beta \eta) + \frac{ak^2 e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} (c-U_1) \quad (15)$$

ここに、 $\beta = \{(c-U_1)k/2v\}^{1/2}$ であり、 β^{-1} は境界層の厚さのオーダーである。また応力変動によって生じた境界層内の連続条件より、 $v|_{\delta} = -\tau' \cos \xi / \rho (U_1 - c)$ (v : 垂直付加流速、 δ : 境界層の厚さ) であり、これより求めた τ' を式(14)に代入すると次式となる。

$$\omega_1 = \frac{ak^2 e^{-kh_1}}{2 \sinh kh_1} (U_1 - c) \{ 1/2 \cos \xi e^{-\beta \eta} \cos(k\xi + \beta \eta) - e^{-\sqrt{2} \beta \eta} \cos(2k\xi + \sqrt{2} \beta \eta) - 1 \} \quad (16)$$

次に、境界層内の流れを局所等方性、非圧縮であると仮定すれば、単位面積、単位時間、1波長当りの平均エネルギー逸散率 $\bar{E}$ は次式で与えられる。

$$\bar{E} = -7.5 \frac{\mu}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^\delta \epsilon^2 \omega_1^2 d\eta d\xi = -\frac{2.19 \mu a^4 k^6 e^{-2kh_1}}{\beta \sinh^2 kh_1} (U_1 - c)^2 \quad (17)$$

さらに界面抵抗係数は、 $\tau_1 = 1/2 f_i \rho U_1^2 = -\bar{E} / U_1$ で定義され結局次式が得られる。

$$f_i = \frac{6.19 (ak)^4 e^{-2kh_1}}{\sinh^2 kh_1} (kh_1)^{3/2} Re^{-3/2} \left(\frac{c}{U_1} - 1 \right)^{3/2} \quad (18)$$

またポテンシャル流理論より導かれる波速 c を近似的に用いて、界面波の特性により分類すると f_i は次式の形で表されることができる。

$$f_i = A (Re F_i)^{-3/2} \quad (19)$$

ここに、 $A = \text{const.}$, $Re = U_1 h_1 / \nu_1$,

$F_i = U_1 / (\Delta \rho / \rho g h_1)^{1/2}$ である。

3. 結果と考察

玉井・浅枝⁷⁾の補遺、江頭・芦田³⁾および著者らの実験資料を図-2に示す。これより A の値を求めると次の2つの領域で表されることがわかる

$Re F_i \leq 10^4$: $f_i = 8.12 \times 10^2 (Re F_i)^{-3/2}$

$Re F_i > 10^4$: $f_i = 5.37 \times 10^4 (Re F_i)^{-3/2}$

これは実際の河川では、上層厚さに界面波高を考慮する必要があるものと考えられる。

参考文献 1) 玉井信行・浅枝隆：淡塩2層流境界面における抵抗係数について、土木学会論文報告集、No.271、1978. 2) 江頭進治・芦田和男：成層密度流の流れの構造に関する研究、京都大学防災研究所年報、No.22B-2、1979.

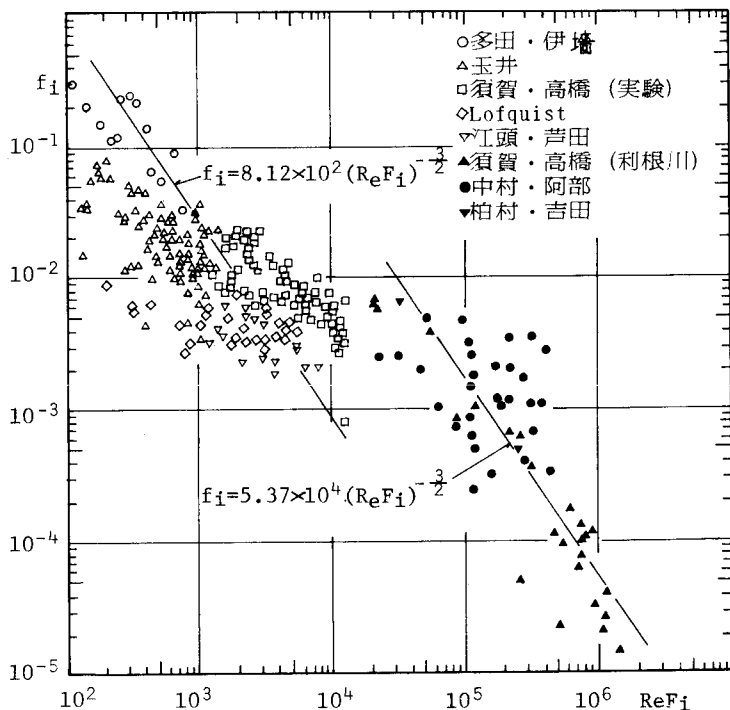


図-2 f_i と $Re F_i$ の関係