

京都大学防災研究所 正会員 江頭進治

京都大学防災研究所 正会員 芦田和男

京都大学防災研究所 正会員 中川一

1. まえがき 密度流先端部の挙動に関し、最近、ようやく混合特性を考慮した解析が行われるようになってきた。ここでは、直線路床を流下する密度流先端部分に着目し、体積、密度および流下速度に関する支配方程式を導くとともに、その解析解を呈示し、先端部の種々の特性について検討する。

2. 支配方程式の誘導 簡単のため、2次元の現象を対象とする。

図-1のように、傾斜角 θ の路床に沿って x 軸、垂直上向きに z 軸とすると、連続式、質量および運動量保存則は、それぞれ次のようである。

$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = 0 \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x + \partial \rho w / \partial z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u u) + \frac{\partial}{\partial z}(u w) = \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (3)$$

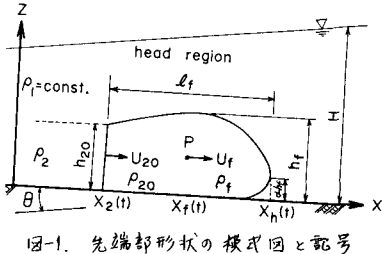


図-1. 先端部形状の模式図と記号

ここに、 ρ_0 :基準密度で、ここでは $\rho_0 = \rho_f$ とする。他は慣用記号である。(1)および(2)式を底面($z=0$)から界面($z=h_2$)まで積分すると、下層に関する体積および質量保存則が次のように導ける。¹⁾

$$\partial h_2 / \partial t + \partial u_2 h_2 / \partial x = W_e \quad (4)$$

$$\partial \rho_2 / \partial t + \partial \rho_2 u_2 h_2 / \partial x = \rho_f W_e \quad (5)$$

ここに、 W_e :上層から下層への連行速度である。また、圧力 p を $p = p_s + p_e$ (p_s :静水圧、 p_e :変動圧)とみると、圧力勾配は、 $\partial p / \partial x = \rho_f g \sin \theta + \cos \theta \partial p_e / \partial x \int_{z_2}^{h_2} \rho_f g dz + \partial p_e / \partial x$ ($\Delta p = p - p_s$, $\rho_f = \text{const.}$) のように表示できる。これを(3)式に適用して若干の演算を行うと、下層に関する一次元運動量式が次のように導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_2 h_2) + \frac{\partial}{\partial x}(u_2^2 h_2) - u_e W_e = \frac{\rho_f}{\rho_0} g h_2 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_f}{\rho_0} g h_2^2 \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_e h_2) + \frac{z_1 - z_2}{\rho_0} \quad (6)$$

ここに、 $\Delta p_s = p_s - p_f$ 、 u_e は界面流速であって、 $u_e \neq 0$ とすれば $u_e W_e = 0$ とおける。

いま、図-1に示すように、先端部の最大波高 h_f 、長さ l_f 、先端部の重心の位置 P 、 P 点の流下速度 U_f 、先端部の平均密度 ρ_f 、および先端部と後方部との接線面における流速と密度を U_{20} 、 ρ_{20} とする。さて、(4)~(6)式を (x, z) 座標($\xi = x - x_f(t)$, $\xi_f(t) = \int_{x_2}^x u_2 dt$)を用いて書き直し、 $\xi = \xi_2$ より ξ_h ($\xi_2 = x_2(t) - x_f(t)$, $\xi_h = x_h(t) - x_f(t)$)まで積分して若干の変形を行うと、先端部分に関する体積、質量および運動量保存則が、それぞれ次のように求められる。

$$\frac{d A_f}{d t} = -r \beta_0 + \beta_e \quad (7)$$

$$A_f \frac{d \rho_f}{d t} = r \Delta \rho_f \beta_0 \left(1 - \frac{\rho_{20}}{\rho_f} - \frac{\beta_e}{r \beta_0} \right) \quad (8)$$

$$A_f \frac{d U_f}{d t} = \frac{\Delta \rho_f}{\rho_0} g A_f \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{\rho_{20}}{\rho_0} g h_{20}^2 \cos \theta + r (U_f - U_{20}) \beta_0 - U_f \beta_e - \frac{1}{2} \{ C_0 h_f + (f_0 + f_1) l_f \} U_f^2 \quad (9)$$

ここに、 $r = (U_f + d \xi_2 / d t) / U_{20} - 1$ 、 $\beta_e = \int_{\xi_2}^{\xi_h} W_e d \xi$ 、 $\beta_0 = U_{20} h_{20}$ 、 $\Delta \rho_f \doteq \int_{\xi_2}^{\xi_h} (\rho_2 - \rho_f) h_2 d \xi / A_f$ 、 $\Delta \rho_0 = \rho_{20} - \rho_f$ 、 $A_f = \int_{\xi_2}^{\xi_h} h_2 d \xi$ 、 $f_0 + f_1 = 2 \int_{\xi_2}^{\xi_h} (z_1 - z_2) d \xi / U_f^2 l_f$ 、 $C_0 = 2 / \rho_0 \cdot \int_{\xi_2}^{\xi_h} \rho_2 h_2 / \rho_f d \xi$ で、 C_0 は形状抵抗係数。

3. 支配方程式の解とその特性 (7)、(8)、(9)式を解くために密度、流速および形状比を次のようにおく。

$$k_\rho = \Delta \rho_0 / \Delta \rho_f, \quad k_u = U_{20} / U_f, \quad \alpha = \beta_e / U_f h_f, \quad k_{s1} = h_{20} / h_f, \quad k_{s2} = l_f / h_f, \quad k_{s3} = -\xi_2 / h_f, \quad k_{s4} = A_f / h_f^2$$

ここで、これらのパラメータを(7)~(9)式に代入し、 k_ρ 、 k_u 、 α 、 k_{s1} 、 k_{s2} 、 k_{s3} および k_{s4} が時間 t に関して一定とすると、これらの支配方程式は、次のようになる。

$$dh_f/dt = b_1 U_f \quad (10A) \quad dh_f/dx = b_1 \quad (10B)$$

$$d\Delta\rho_f/dt = b_2 \Delta\rho_f U_f/h_f \quad (11A) \quad d\Delta\rho_f/dx = b_2 \Delta\rho_f/h_f \quad (11B)$$

$$dU_f/dt + b_4 U_f^2/h_f = b_3 \Delta\rho_f g/\rho_0 \quad (12A)$$

$$U_f dU_f/dx + b_4 U_f^2/h_f = b_3 \Delta\rho_f g/\rho_0 \quad (12B)$$

ここに、 $U_f dt = dx$ である。(10B)~(12B) 式を解くと、先端部波高 h_f 、密度 $\Delta\rho_f$ および流下速度 U_f について、それぞれ次式を得る。

$$h_f/h_{f0} = b_1 x_* + 1$$

$$\Delta\rho_f/\Delta\rho_{f0} = (b_1 x_* + 1)^{b_2/b_1}, \quad (b_1 \neq 0)$$

$$\left(\frac{U_f}{U_{f0}}\right)^2 = \frac{2b_2}{b_1 + b_2 + 2b_4} \frac{\{b_1 x_* + 1\}^{(b_1 + b_2 + 2b_4)/b_1} - 1}{(b_1 x_* + 1)^{2b_4/b_1}} F_{co}^{-2} + \frac{1}{(b_1 x_* + 1)^{2b_4/b_1}}, \quad (b_1, b_4 \neq 0) \quad (15A)$$

ここに、 $x_* = x/h_{f0}$ で、 h_{f0} 、 $\Delta\rho_{f0}$ 、 U_{f0} は $x_* = 0$ における値、 $F_{co}^{-2} = \Delta\rho_{f0} g h_{f0} / \rho_0 U_{f0}^2$ 、 b_1, b_2, b_3, b_4 は、次式のようである。

$$b_1 = \{k_{s1}(k_u - 1) + \alpha\} / (2k_{s4} - k_{s1}k_{s3}) \quad (16)$$

$$b_2 = k_{s1}/k_{s4} \cdot \{(1 - k_u)(1 - k_p) - b_1 k_{s3}(1 - k_p) - \alpha/k_{s3}\} \quad (17)$$

$$b_3 = 1/k_{s4} \cdot (k_{s4} \tan \theta + 1/2 \cdot k_p k_{s1}^2) \cos \theta \quad (18)$$

$$b_4 = -k_{s1}(1 - k_u)^2 + b_1 k_{s1}k_{s3}(1 - k_u) + \alpha + 1/2 \cdot C_D \{1 + k_{s2}/C_D \cdot (f_i + f_b)\} \quad (19)$$

なお、 $(U_f/U_{f0})^2$ は、 $b_1 = b_2 = 0$ のとき、次式のようになる。

$$(U_f/U_{f0})^2 = b_3/b_4 \cdot F_{co}^{-2} + (1 + b_3/b_4 \cdot F_{co}^{-2}) e^{-2b_4 x_*}, \quad (b_1 = b_2 = 0) \quad (15B)$$

さて、(10B)、(11B) 式より明らかなように、波高 h_f および密度 $\Delta\rho_f$ の増減は、パラメータ b_1, b_2 によって規定される。図-2 は、 (k_{s1}, k_u) 平面上における h_f の発達・減衰領域について、 α をパラメータとして示したもので、図中の曲線は、 $k_{s1}(k_u - 1) + \alpha = 0$ である。図-3 は、 $b_1 \leq 0$ および $b_2 \leq 0$ より定められる波高と密度の増減領域の一例を (k_u, k_p) 平面上に示したものであって、図中の $\Delta\dot{\rho}_f \equiv d\rho_f/dx = 0$ の曲線は、次式、 $1 - b_1 k_{s3} + (1 - k_u) - \alpha/k_{s1}(1 - k_p) = 0$ において、 $\alpha = 0.2$ 、 $k_{s1} = 1.0$ 、 $b_1 k_{s3} < 1$ としたときのものである。

つぎに、先端部の流下速度の特性、とくに、流下速度が一定となる条件を調べてみよう。まず、(15B) 式についてみると、一般に $b_3, b_4 > 0$ であるから、右辺第2項は、 x_* が大きくなると0に近づく。この場合、先端部の流下速度およびその条件は、次式のようなになる。

$$U_f = \sqrt{b_3/b_4} \sqrt{\Delta\rho_{f0}/\rho_0 \cdot g h_{f0}}, \quad k_u = 1, \quad \alpha = 0 \quad (16)$$

上式において、 $\tan \theta \ll 1$ 、 $k_p \approx 1$ 、 $k_{s1} \approx k_{s4}$ および $k_{s2}(f_i + f_b) \ll C_D$ のとき、 $\sqrt{b_3/b_4} = \sqrt{1/C_D}$ となり、先端部の流下速度に関する古典的な推定式と等価になる。先端部の流下速度が一定となるもう一つの条件として、 $b_1 + b_2 = 0$ ($b_1 > 0$ 、 $b_2 < 0$) すなわち、波高が増加するに伴って密度が減少し、 U_f が一定となる条件が考えられる。この条件をみるため、(15A) 式において、 $b_1 + b_2 = 0$ とおき、 $x_* \rightarrow \infty$ とすると、(16) 式と同じ式を得る。このとき、先端部の挙動を支配するパラメータの間には、次式の関係が必要となる。

$$\alpha = k_{s1}k_{s4}(1 - k_u)(1 - 2k_p) / \{k_{s4} - k_{s1}k_{s3}(2 - k_p)\} \quad (17)$$

4. あとがき 混合を考慮した支配方程式およびその解析解を示し、先端部の挙動に関する若干の考察を行った。ここで示した解析理論は、~~床~~床面上に形成される密度流ばかりでなく、一般の密度流に対しても適用できる。理論の検証や支配方程式に含まれる種々のパラメータについては、講演時に述べる。

参考文献：1) 江頭・菅田；成層密度流の流れの構造に関する研究，京大防災研究所年報，22号B-2，1979。

2) 中川・菅田・江頭；泥水塊の挙動に関する研究，第36回年次講演会，1981。

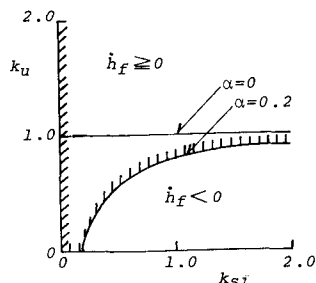


図-2. 波高 h_f の発達・減衰領域

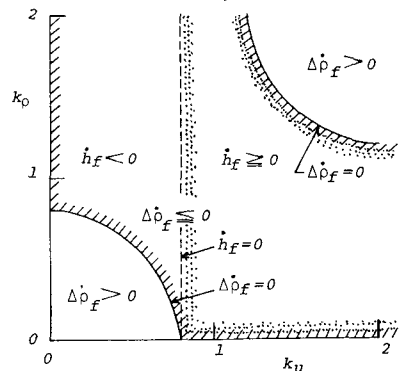


図-3. 密度 $\Delta\rho_f$ および波高 h_f の発達・減衰領域 ($\alpha = 0.2$)