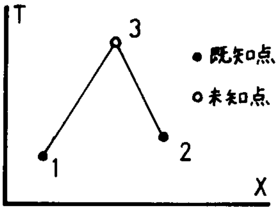
# II-165　開水路不定流方程式の特性について

東京工業大学大学院　学生員　坪 田 勝 幸
山梨大学　工学部　正 員　荻 原 能 男

## 1．はじめに

洪水追跡の数値計算などに用いられている開水路不定流方程式において、項の一部を省略して近似計算をする場合がしばしばある。この項省略が解にどのように影響するかを調べるのが本論文の目的である。熊坂・荻原は開水路不定流方程式の各項に省略を示すパラメーターとしての1から0まで変化する係数を乗じ、差分化・無次元化を行ない、特性曲線法においての水路床に沿う距離と時刻、また、流速と水深の関係を調べた。本研究では、図－1に示す既知点1,2の水理量の微少変化、および、項省略を独立に行なった時の未知点3の水理量の変化を調べ、この結果に加えて、未知点3の流速と水深を項省略を行なわないで正確に求め、両者を比較して項省略による影響を調べた。




図－1

## 2．基礎方程式

開水路不定流の連続の方程式と運動方程式に1から0まで0.1ずつ減少する係数を乗じると式(1),(2)のようになる。ただし、係数は一つずつ変化し同時に複数個は変化しないものとする。

$$A_1\frac{\partial v}{\partial t}+A_2 v\frac{\partial v}{\partial x}+A_3 g\frac{\partial h}{\partial x}=A_4 g\left(S_0-S_f\right) \quad \text{----(1)}$$

$$B_1\frac{\partial h}{\partial t}+B_2 v\frac{\partial h}{\partial x}+B_3 h\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \text{-------(2)}$$

ここに、水路床に沿う距離$x$，時刻$t$，流速$v$，水深$h$，重力加速度$g$，水路床勾配$S_0$，摩擦勾配$S_f$である。この式(1),(2)から得られる特性方程式は次の式(3),(4)である。

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}+\frac{B_2}{B_1}\right)\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}-\frac{B_2}{B_1}\right)\right\}^2+\frac{A_3B_3}{A_1B_1Fr^2}}\right]v \quad \text{------------------(3)}$$

$$h\frac{dv}{dt}+\frac{B_1}{B_3}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}-\frac{B_2}{B_1}\right)\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}-\frac{B_2}{B_1}\right)\right\}^2+\frac{A_3B_3}{A_1B_1Fr^2}}\right]v\frac{dh}{dt}=\frac{A_4}{A_1}gh\left(S_0-S_f\right) \quad \text{------(4)}$$

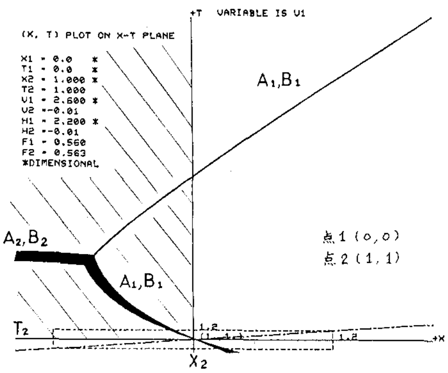
ここに、$F_r$はフルード数である。この式(3),(4)を差分化し、既知点1の座標を$x$－$t$平面において$x_1=t_1=0$と原点に平行移動して$\tilde{x}_i=x_i/x_2$，$\tilde{t}_i=v_1t_i/x_2$，$\tilde{v}_i=v_i-v_1/v_1$，$\tilde{h}_i=h_i-h_1/h_1$なる無次元化を行なってから数値計算をすすめる。

## 3．数値解析

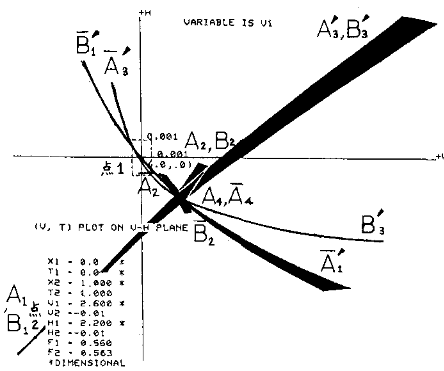
数値計算にあたり原則として既知点1,2の関係は$x_2>x_1$，$t_2>t_1$とし、既知点1,2の水理量を1％きざみで±5％まで変化させた。また、図－3で、項省略を行なって式(3)から求められた未知点3の水路床に沿う距離と時刻をもとに、式(4)を用いて項省略を行なって求められた未知点3の流速と水深の変化を$\bar{A}_1$，$\bar{B}_1$で示し、項省略を行なわないで求められたものを$A_1$，$B_1$で示した。$\bar{A}_1$，$\bar{B}_1$の変化と$A_1$，$B_1$の変化とに差の大きいものは、項省略を行なうと正確な値が得られないことを示す。

## 4．結果

数値解析の結果の一例として、常流時の既知点1の流速が微少変化する場合を示す。この場合の未知点3の水理量の変化は、図上の曲線の幅方向である。図－2に項省略を行なった時の未知点3の水路床に沿う距離と時刻の変化を、図－3に項省略を行なった時と行なわなかった時の未知点3の流速と水深の変化を示す。図－2の斜線部分は常流時の定義域である。図－3の ′ の付された英文字は未知点3の流速と水深の変化率の大きいものを示す。係数の減少に対する未知点3の水理量の変化の方向は、変化の中心から発散する方向である。




図－2　点3の$\tilde{x}$と$\tilde{t}$の変化




図－3　点3の$\tilde{v}$と$\tilde{h}$の変化

図－2,3より次のことがわかる。ただし、$A_1$の省略とは$A_1$の乗ぜられた項の省略を意味している。

○式(3)でも明らかなように$A_1$と$B_1$，$A_2$と$B_2$，$A_3$と$B_3$には互換性がある。また、正負の特性曲線・特性方程式から省略しようとする項に乗ぜられた係数を文字式として消去した解析解でも確かめられる。係数$\bar{A}_1$，$\bar{B}_1$などの組についても同一曲線上にあるという性質が見られる。

○$A_1$または$B_1$の省略　係数変化のもとで点1の流速の微少変化を行なうと、点3の水理量の$\bar{A}_1$，$\bar{B}_1$の変化では点2以外の方向へ発散または収束していたのが、$A_1$，$B_1$の変化では点2で収束することがわかる。点2を通過する時点から特性曲線網は発達しなくなるのが、項省略により方程式の物理的性質を逸脱して可能にしてしまう。$A_1$の省略で流速、$B_1$の省略で水深の増減が逆方向に大きく変化し、その変化率は正方向に大きい。このような時間についての偏微分項の一つだけを省略することは、もとの方程式への影響が大きく不可能である。

○$A_2$または$B_2$の省略　係数変化のもとで点1の流速の微少変化を行なうと、点3の水理量の変化は小さく、特に時刻については影響がない。変化の方向は違うが全変化量は同程度であり、他の項の省略に比べて小さく、点1,2の量的な差の四分の一以下である。ところが、射流では変化が大きく、項省略の影響は他の項の省略によるものと同程度である。係数変化による点3の水理量の変化率は一定であり、フルード数は小さくなる傾向がある。流速，水深にはどちらかが増減の方向が逆になっていることは$A_1$，$B_1$の省略の場合と同じである。

○$A_3$または$B_3$の省略　係数変化のもとで点1の流速の微少変化を行なうと、点3の水理量の$\bar{A}_3$，$\bar{B}_3$の変化では小さく、$A_3$，$B_3$の変化では発散する。係数変化による点3の水理量の$A_3$，$B_3$の変化は点2と逆方向に大きな変化率を持っている。また、$A_3$の省略は流速、$B_3$の省略は水深の増減が逆方向に大きく変化し、その変化率は正方向に大きい。未知点3の水理量は、既知点1,2の水理量の微少変化では影響が小さく、この項の省略による影響の方が大きい。流速，水深の変化方向が$A_1$，$B_1$と逆であることから、$A_1$，$B_1$と逆の性質を持っていると思われる。

○$A_4$の省略　点1の流速の微少変化、係数の変化の両方に対して変化は小さく、他の項の省略による変化からみて無視でき得る程小さく、その変化は$A_3$，$B_3$の省略の場合に似ている。射流時には、$\bar{A}_4$の変化は大きいが、$A_4$の変化は常流同様小さく、この項の省略は数値計算の精度の段階にその影響が現われるであろう。一方、図－2，式(3)から明らかなようにこの項は水路床に沿う距離と時刻には無関係である。

5．まとめ

以上のことから、開水路不定流方程式の各項が未知点3の水理量（特に流速と水深）に対してどのような影響力を持っているかが明らかになったが、各項の特性を知る為には他の条件下での検討が必要であろう。

参考文献


熊坂博男・荻原能男　開水路不定流方程式の各項の特性について　第35回土木学会年講　S55，9月