

1. まえがき 水質保全あるいは水管理の合理化の面から、各種用水の送配水に管路方式が多用されるようになってきている。こうした送配水システムはトリー構造の幹線系をもち、末端水需要構造に応じた水管理が要請されるために、これらの計画設計の技術的課題として、水管理を考慮した非定常現象の水理解析手法の展開がある。このような観点から、本文はセミクロズドタイプの複雑な分岐管路系に対してすでに得られている数学モデルに基づいて、こうした系の安定性を論じ、さらに、数値シミュレーション結果より分岐管路系のサージング特性について考察したものである。

2. 分岐管路系の漸近安定 1つのソースノード(貯水池)と m 個のシンクノード(末端水槽)をもち、 n 本の枝から成るトリーグラフでモデル化される分岐管路系を考える。この系の状態方程式は、計算機シミュレーションに便利のように、行列とベクトルを用いて統一的に定式化されている¹⁾。この数学モデルは非線形であるため、その解の一般的特性を知ることは困難であるが、平衡点近傍における解の特性は微小な摂動に関する線形化方程式系に基づいて調べることができる。すでに報告したように、線形化方程式系は次のように表わされる²⁾。

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{Q}_{T2(m)} \\ \Delta \dot{\Phi}_3(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{(m,m)}^{-1} K_{(m,m)}^* & -L_{(m,m)}^{-1} \\ S_{T(m,m)}^{-1} & -S_{T(m,m)}^{-1} C_{(m,m)} F'(\Phi_3^*(m,m)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta Q_{T2(m)} \\ \Delta \Phi_3(m) \end{pmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 ΔQ_{T2} 、 $\Delta \Phi_3$ はそれぞれシンクノードに対する流入管路流量およびエネルギー位(水槽水位に近似的に等しい)の微小な摂動を表すベクトルであり、 $*$ は平衡点における量を意味している。また、 L および K^* は

$$L' = B_{T1} L \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1} A_{T22} \\ E \end{pmatrix}, \quad K^* = 2 B_{T1} K |Q_{T1}^*| \begin{pmatrix} -A_{T21}^{-1} A_{T22} \\ E \end{pmatrix} \quad \text{----- (2)}$$

で定義される行列である。式(1)の右辺の最初の係数行列を $Q_{(2m,2m)}$ で表わし、 Q の固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, 2m$)はすべて相異なると仮定すると、 $P^{-1}QP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2m})$ なる正則な実行列 $P_{(2m,2m)}$ が存在する。そこで、

$$X_{(2m)} = P_{(2m,2m)} \begin{pmatrix} \Delta Q_{T2(m)} \\ \Delta \Phi_3(m) \end{pmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

の変数変換を行うと、式(1)に等価な次式が得られる。

$$\dot{X}_{(2m)} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2m}) \cdot X_{(2m)} \quad \text{----- (4)}$$

ここで、 $X = (x_1, \dots, x_{2m})^T$ とし、次のような関数 V を考える。

$$V = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2m}^2 \quad \text{----- (5)}$$

明らかに、 $V \geq 0$ であり、また、固有値 λ_i はすべて負であるとすれば、式(4)を考慮して、 $\dot{V} \leq 0$ が成立することになるので、関数 V はいわゆるリヤプノフ関数に他ならない。したがって、この場合、リヤプノフの方法による安定性理論を適用することができて、系の原点(平衡解)は漸近安定であることが知られる。

さて、行列 Q の固有値は実際の分岐管路系に対してどのようになるか考えてみると、 Q の4つの部分行列のうち S_T^{-1} および $-S_T^{-1}CF'$ は対角行列であるから、固有値に関係する行列要素は結局4つの部分行列の対角要素のみであることが分る。ところで、通常分岐管路系を問題とすると、 $-L^{-1}K^*$ と $-S_T^{-1}CF'$ の対角要素はすべて負になると考えてよく、また、 S_T^{-1} と $-L^{-1}$ のすべての対角要素を掛け合わせたものは他の項に比べて無視できる程小さい。したがって、実際の分岐管路系に対する行列 Q の固有値はすべて負の値で得られるものと考えて差し支えないので、非線形状態方程式系で記述されるもとのシステムは大域的漸近安定であるといつてよいであろう。

3. サージング減衰特性 前節で論じた系の安定性をより明確にするために、図-1に示す分岐管路系について数値シミュレーションを行った。系の諸元は表-1のようであり、末端水槽からの取出し流量の制御方式はオ

リフィスタイプのものを考えた。図-2は表-2のケース②の初期条件の下で行ったシミュレーション結果より、ノード6および8における水位の応答を示したものである。これより、オリフィス開度、つまり取出し流量によってサージングの減衰の速さは異なること、また、その減衰性状は指数関数で近似されることが分る。

つぎに、図-3はシンクノード5のみでオリフィス開度を変えた場合の各シンクノードにおける $\Delta\phi_i/\phi_i^*$ の時間的変化を時定数 τ_i によって示したものである。同図より、各シンクノードに対して同一の $\Delta\phi_i/\phi_i^*$ の条件の下では、オリフィス開度と時定数との間には上に凸の曲線関係の部分があり、これが極大、即ちサージングの減衰が最も遅くなるような取出し流量が存在することが知られる。また、シンクノード8の水槽断面積と各シンクノードにおけるサージングの時定数との関係を示した図-4によれば、末端水槽の断面積と当該水槽において生ずるサージングの時定数は比例関係にあることも知られる。

以上はすべての末端水槽に外乱が加えられた場合についてのシミュレーション結果であるが、1つの末端水槽に加えられた外乱によって他の末端水槽に誘起される応答の特性を知るために、表-2のケース③~⑥について解析を行った。インパルス状の外乱によって誘起される水位変動の振幅が最大になるまでの時間を「遅延時間」と呼ぶことにすれば、得られた結果をこれについて整理すると表-3のようである。

この表より、末端水槽水位の高低に無関係に任意の2つの末端水槽の間には、水位の外乱の生起時刻から誘起される水位変動が最大になる時刻までの時間差は互いに等しくなるという特徴があることが分る。なお、どのような比率の外乱を与えても上述のような特徴は認められたので、末端水槽からの取出し流量が一定という条件の下では「遅延時間」は系に固有のものとなることが推察される。

4. あとがき 分岐管路系の安定性について線形化方程式系より考察し、モデルケースについての数値計算結果からシステムの基本的なサージング特性をいくつか指摘した。今後さらに、末端での水利用パターンからみた分岐管路系の応答性状等についても検討を進めてゆく予定である。

(参考文献) 1) 常松芳昭：管路系における非定常流れの解析法について(1)、土木学会中四支部年講、昭和52年。

2) 常松芳昭：管路系における非定常流れの解析法について(3)、土木学会中四支部年講、昭和55年。

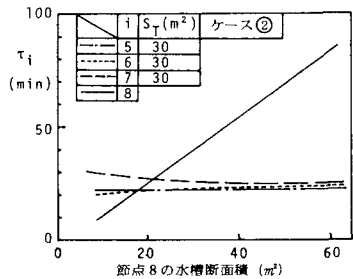


図-4 水槽断面積と時定数との関係

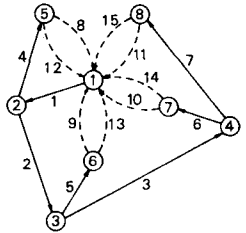


図-1 システムグラフ

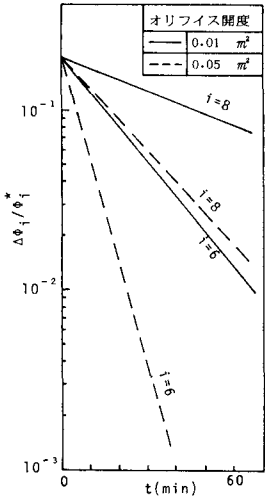


図-2 水槽水位の応答

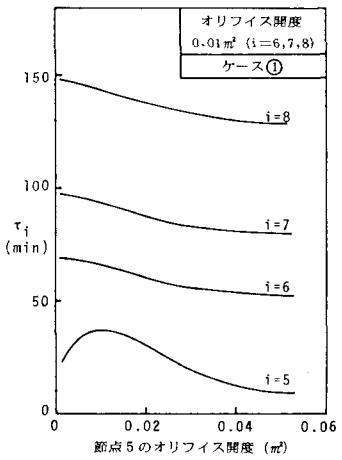


図-3 オリフィス開度と時定数

表-1 分岐管路系の諸元

枝番号	1	2	3	4	5	6	7
管長 (m)	500.00	500.00	500.00	232.69	224.17	235.29	318.75
管直径 (m)	0.5	0.5	0.5	0.3	0.3	0.3	0.3
節点番号	5	6	7	8	f=0.03 C=0.62 phi_1=50.0 m		
末端水槽断面積 (m^2)	30.0	30.0	30.0	50.0			
オリフィス高度 (m)	30.0	20.0	10.0	0.0			
オリフィス開度 (m^2)	0.01	0.01	0.01	0.01			

表-2 擾動 $\Delta\phi_i/\phi_i^*$ の初期条件(%)

ケース番号	5	6	7	8
①	+20	+20	+20	+20
②	-20	+20	-20	+20
③	+20	0	0	0
④	0	+20	0	0
⑤	0	0	+20	0
⑥	0	0	0	+20

表-3 遅延時間(min)

ケース番号	5	6	7	8
③	-	30	41	68
④	30	-	38	64
⑤	41	38	-	62
⑥	68	64	62	-