II-162　多自由度管内振動に対するモード解析

東京都立大学　正員　○宇井　正和
東京都立大学　正員　安川　浩
住友建設　正員　浅沼　秀俊

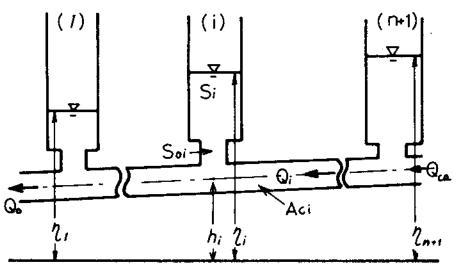
1.　まえがき　　著者らは下水管渠におけるマンホール蓋飛び現象を解明するために，多数のライザーが存在する管路系内の水面振動をRunge-Kutta-Gillによる数値積分を利用して解析し，極めて良好な結果を得てきた。しかしこれらの管路内流れは，流出あるいは流入流量の変化に応じたライザー内水面振動を伴う非定常現象であり，又管路壁面による減衰力，ライザー取付部における圧力降下および水面振動による流体加速度が加わるため，流れの基本方程式は2階の非線型微分方程式に帰着される。それ故方程式の一般解は存在せず個々の場合についてそれぞれ解を求めなければならない。

多数のライザーを有した管路系における流体運動を数値積分によって忠実に解析し，正確な数値を求める事は重要ではあるが数値解法それ自身その結果の特徴をあらかじめ予想する事は困難であるし，管路系内要素の依存性を検討したり他のケースへの適用を期待する時は何回もの計算を実行しなければならない。そのため流体振動の特徴がその管路系の形態に大きく依存するものと考え，モード解析の方法を応用して管路系内流体のもつ固有振動を求め，それの非定常運動への効果を検討すると共に，その系のもつ流体振動の特徴を検討する事が本研究の目的である。

2.　基本方程式　　管路系を図1に示すように，$n+1$ 本のライザーの付いた管路と考え，i と $i+1$ 番のライザー間管路内流量 Q_i に対する運動方程式を示す。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dQ_i}{dt}=\frac{gA_{ci}}{l_i}\left\{\left(\frac{P_{i+1}}{\rho g}+h_i\right)-\left(\frac{P_i}{\rho g}+h_i\right)\right\}-\frac{g n_i^2}{R_i^{4/3}\cdot A_{ci}}Q_i^2 && 1)\\
&\frac{P_i}{\rho g}+h_i=\frac{P_o}{\rho g}+\eta_i+\frac{Q_{ri}^2}{g}\left(\frac{1}{S_{oi}^2}+\frac{1}{S_i^2}-\frac{1}{S_{oi}\cdot S_i}\right)+\frac{1}{g}\frac{dQ_{ri}}{dt}\left(\frac{\eta_i-h_i}{S_i}+\frac{B_i-h_i}{S_{oi}}\right) && 2)\\
&\frac{d\eta_i}{dt}=\frac{1}{S_i}\left(Q_i-Q_{i-1}\right)=\frac{1}{S_i}Q_{ri} && 3)
\end{aligned}
\right.
$$

ここに，Q_i：管路内流量，Q_{ri}：ライザー管内流量，η_i：ライザー内水位，S_i：ライザー管断面積，A_{ci}：管路断面積，S_{oi}：ライザー取付部の断面積，h_i：管路の高さ，l_i：管路長，B_i：ライザー断面拡大部の高さ，R_i：径深，n_i：マニングの粗度係数，P_i：管軸上圧力　である。添字は対応する管路における諸量である。



しかし基本方程式は管路内流量 Q_i に関して非線型であるためそのまゝではモード解析の方法を適用する事はできない。そこで，目的が管内運動の振動形態を調べる事にあるため，1) 流量の時間変動量が小さく，又 2) ライザーも管路取付部における断面変化がないものとした。その結果管軸上圧力 P_i はそこのライザー水位のみに依存する。

3.　モード解析　　前式を整理するために，2)式を1)式へ代入し，それと3)式から水位 η_i を消去すると方程式は Q_i に関する2階の常微分方程式となる。

$$\frac{d^2Q_i}{dt^2}+2B_i\bar{Q}\frac{dQ_i}{dt}-A_iC_iQ_{i-1}+A_i(C_{i+1}+C_i)Q_i-A_iC_{i+1}Q_{i+1}=0 \qquad 4)$$

$$\left(A_i = \frac{g A_{ci}}{l_i}, \qquad B_i = \frac{g\, n_i^2}{R_i^{4/3} A_{ci}}, \qquad C_i = \frac{1}{S_i} \right)$$

この方程式をiは1からnまでの全ての管に対して求めると，n個の変数に対する連立方程式が作られる。 その中でQ_0は才一管路からの流出量，Q_{n+1}は最終管への流入量を表わし，又才二項の$\bar{Q}$は仮定1)により定常状態における平均流速におきかえたもので，その結果4)式は線型方程式として扱えることになる。

さて上記のn個の方程式を次式のように簡単なマトリックス表示にすることができる。

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{P\} \qquad 5)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad [C] = 2Q\begin{bmatrix} B_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} A_1(C_1+C_2), & -A_1C_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -A_2C_2 & A_2(C_2+C_3), & -A_2C_3, & 0 & & \vdots \\ 0 & -A_3C_3, & A_3(C_3+C_4), & -A_3C_4 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -A_nC_n, & A_n(C_n+C_{n+1}) \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} A_1C_1Q_0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_nC_nQ_{ca} \end{Bmatrix} \qquad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

5)式をモード解析の方法に従って解く場合，まず固有振動数と固有モードを求めなければならない。 固有振動数は減衰力の作用かない状態で考える事ができるから，固有値は，

$$\det\{[K] - \omega^2[M]\} = 0 \qquad 6)$$

から求められる。 ωはn個存在するが，ωの小さい値から順番にω_iの形で並べるとそれらに対する固有モードベクトル$\{Y_i\}$は次式の連立方程式から決定する事ができる。

$$\{[K] - \omega_i^2[M]\}\{Y_i\} = 0 \qquad 7)$$

しかるに上式は右辺が0であるため一意的に求められず，各々の成分の比の形でしか与えられない。

従属変数$\{Q\}$がモードベクトルの集りであるモードマトリックス$[Y]$と時間のみの関数である$\{q\}$の一次結合によって表わされるとすれば，

$$\{Q\} = [Y]\{q\} = [\{Y_1\}\{Y_2\} --- \{Y_n\}] \qquad 8)$$

となる。 8)式を5)式へ代入し，振動モード形の直交性，即ち$\{Y_i\}^T[C]\{Y_j\} = C_i^*\delta_{ij}$，$\{Y_i\}^T[K]\{Y_j\} = K_i^*\delta_{ij}$ $\{Y_i\}^T[M]\{Y_j\} = M_i^*\delta_{ij}$ が成立すると次式が導びかれる。

$$M_i^*\ddot{q}_i + C_i^*\dot{q}_i + K_i^*q_i = P_i^* \qquad 又は \qquad \ddot{q}_i + 2\omega_i h_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i^*/M_i^* \qquad 9)$$

ここで $\omega_i^2 = K_i^*/M_i^*$，$h_i = C_i^*/2\omega_i M_i^*$ と表わされる。 流出入量を示すP_i^*がきまり初期条件が与えられると9)式は，

$$q_i = e^{-\omega_i h_i t}\left(C_{i1}\sin\omega_i\sqrt{1-h_i^2}\,t + C_{i2}\cos\omega_i\sqrt{1-h_i^2}\,t\right) + 9)式の特解 \qquad 10)$$

として求められ，これを8)式へ代入すると$\{Q\}$が決定される。 又求められたQ_iを3)式へ代入して積分すると水位ζ_iを求める事が出来る。

4．　まとめ　　モード解析を用いる利点として次の点を上げる事ができよう。 1) 固有値および固有モード値を決める6)，7)式は$[K]$と$[M]$のみによるため，管路の長さや断面積等幾何学的形状によって容易に与えられる。 2) ライザーの数が多くなり固有値，固有モードが多く存在する場合にも解に強く影響を及ぼすのはω_iの小さい数個であり，管路数が増大しても計算が複雑にならず管内振動の特徴を容易に把握する事が出来る。

本研究において，都立大学の国井隆弘助教授には解析に必要な多くの説明と助言を頂きました。 ここに厚く感謝の意を表します。

5．　参考文献，　新体系土木工学 10（土木学会編），　マトリクスの理論と応用 R.ツルミュール（ブレイン図書），他