

豊橋技術科学大学大学院 学生員 〇住尾 博幸
 豊橋技術科学大学工学部 正員 北田 敏廣
 豊橋技術科学大学大学院 学生員 後田 瑞穂

1. はじめに、環境汚染に関連して大規模な汚染物拡散の数値解析が行なわれるに到った。その際、問題の基本的性質の検討の他に、数値計算上の誤差(解の安定性、数値分散、位相誤差)を調べる事が重要な問題である。

FDM(差分法)では、計算スキームが簡単になり、空間多次元問題を効率良く解けるTime splitting (Locally one dimensional) 法が考案されている。一方、FEM(有限要素法)は、近年、流体力学の計算に多用されているが、一および二次元の移流方程式に対する適用の結果、与えられた刻み条件で数値誤差の少ない方法として知られている。

上記の、① LOD概念の多次元問題に対する有効性、② 流体問題に適用した時のFEMの精度の良さを結び合わせて、LOD-FEM法が提案されている。しかしながら、テスト問題を用いて、この方法の数値的な特徴はまだ十分に把握されていない。本報では、これを中心にして述べるものである。

LOD-FEM法は、Time splittingにより得られた三つの一次元FEM方程式を連続して解くものである。さらに、FEMの定式化においては、重み関数として非対称関数を用いるUpwind-FEMを使用した。この方法は、高パケレ数に対して有効なことが知られている。

2. テストモデル。図1が計算領域である。問題として、(A) ソースを持つもの、(B) ソースを持たないものの二つを採用した。

i) 基礎式 $\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_H \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + D_V \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + S$ (1)
 (A, B) 場合によっては、 $v=0$ とした。

ii) 境界条件 P_1, P_2 について $|uC - D_H \frac{\partial C}{\partial x}|^{n+1} = |uC - D_H \frac{\partial C}{\partial x}|^n$ (2)
 (A, B) P_3, P_4 について $|vC - D_H \frac{\partial C}{\partial y}|^{n+1} = |vC - D_H \frac{\partial C}{\partial y}|^n$
 P_5 について $D_V \frac{\partial C}{\partial z} = 0$, P_6 について $|D_H \frac{\partial C}{\partial z}|^{n+1} = |D_H \frac{\partial C}{\partial z}|^n$

但し、 $v=0$ とした場合、 P_3, P_4 について $|D_H \frac{\partial C}{\partial y}|^{n+1} = |D_H \frac{\partial C}{\partial y}|^n$

iii) 初期条件(A) $C(x, y, z, 0) = 0$ (3)

(B) $C(x, y, z, 0) = 10(1 - \frac{R}{600})$ (4)

但し、 $R^2 = (x-900)^2 + (y-2400)^2 + 36(z-250)^2$, $R \geq 600$ の時、 $C=0$

iv) ソース項(A) $S = Q[1 - \sin(\frac{\pi x}{3600} + \frac{\pi}{2})] \delta(x-x_s) \delta(y-y_s) \delta(z-z_s)$ (5)

但し、 $S_p(x_s, y_s, z_s) = S_p(600, 2400, 500)$

v) その他、風速: $U=3\text{ m/s}$, $V=1\text{ m/s}$, 拡散係数: $D_H=30\text{ m}^2/\text{s}$, $D_V=5\text{ m}^2/\text{s}$
 刻み幅: $\Delta x=300\text{ m}$, $\Delta y=300\text{ m}$, $\Delta z=50\text{ m}$, $\Delta t=60\text{ s}$ とする。

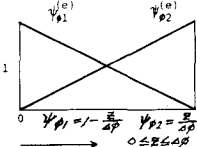


図2

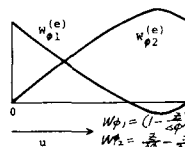


図3

Local interpolation function (linear) Local weighting function (asymmetric quadratic)

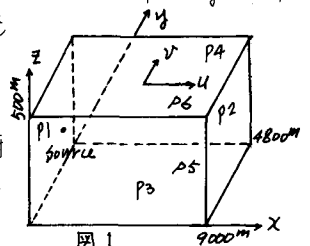


図1

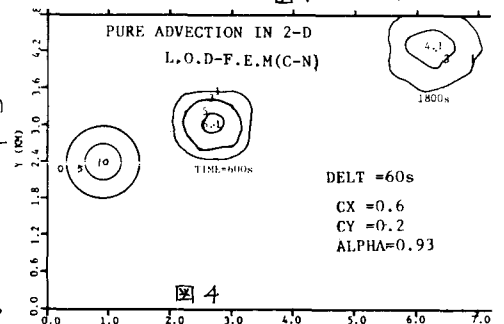


図4

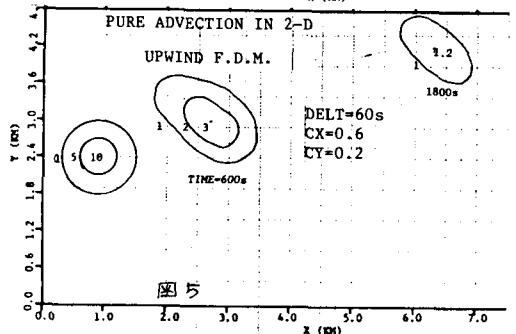


図5

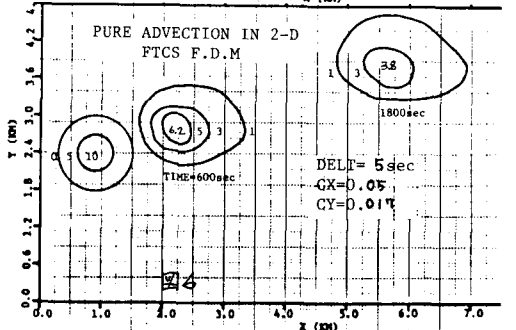


図6

3. FEMの定式化 図2, 図3に示した形状関数と重み関数を用いて, 重み付き残差法から次の方程式を得る。

$A_{ij} \dot{C}_j + B_{ij} C_j = F_i$ (6) 時間に関して, Crank-Nicolson (C-N) と3次のNewton Backward (Back-w) の近似を行なう。

(C-N) $(A_{ij} + \frac{\Delta t}{2} B_{ij}) C_j^{n+1} = (A_{ij} - \frac{\Delta t}{2} B_{ij}) C_j^n + \Delta t F_i^n$
 (Back-w) $(11A_{ij} + 3\Delta t B_{ij}) C_j^{n+1} = (18A_{ij} - 3\Delta t B_{ij}) C_j^n - 6\Delta t C_j^{n-1} + 6\Delta t F_i^n$

4. 結果の考察 図4~7は, (B)のモデルで, 初期分布を移流項のみで流した結果である。(但し, 図7は, $v=0$ としたものである。)

図8~12は, (A)のモデルで, 煙軸上の濃度の計算結果である。

(但し, 図12は, 煙源におけるXY平面の濃度等高線図)(図中の $C_x = \frac{U_{ref}}{\Delta x}$: グラフ数, $D = \frac{D_{ref}}{\Delta x^2} + \frac{D_{ref}}{\Delta y^2} + \frac{D_{ref}}{\Delta z^2}$: 拡散数, $Pe = \frac{U_{ref} \Delta x}{D_{ref}}$: ペクル数)

(i)数値分散, 位相誤差 (図4~7): 各スキームとも, ピーク濃度がかなり減衰している。その中で, LOD-FEM(C-N)とFTCが, Upwindと比較して, 相対的に減衰が小さい。初期分布カーンの重心位置は, 移流後も LOD-FEM(C-N)とUpwindは正しく運んで113が

FTCにふいではズレが生じている。又, 初期の円形分布を一番良く保持しているのは, LOD-FEM(C-N)である。風速がUのみの結果がらも同様のことが解る。以上のことからLOD-FEMが相対的に減衰が少なく, 位相誤差のないスキームと言える。図示していないが, LOD-FEM(B-W)では, 振動が見受けられた。4つ目の条に対する時間近似では, 良い結果を示したという報告⁽⁴⁾もあり, 再検討の余地がある。

(ii)安定性 (図8~10): 煙軸上の濃度計算結果は安定な解であった。いずれも, FDMでの流出境界での負の濃度が正に改善されている。図12における濃度分布場も, 定性的に妥当であると考えられる。

(iii)Upwinding (図11): Upwindのペクル数を変化させて計算したものが0.5以下では振動が見える。本計算では, 定常時の最適値 $\alpha=0.93$ を用いた。

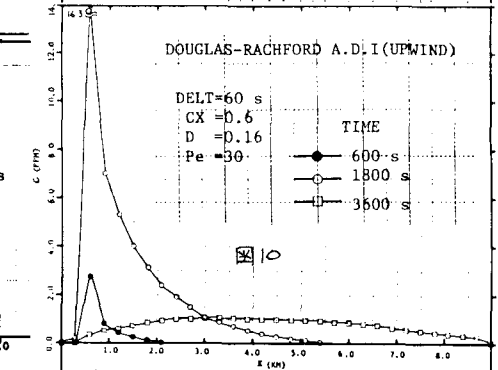
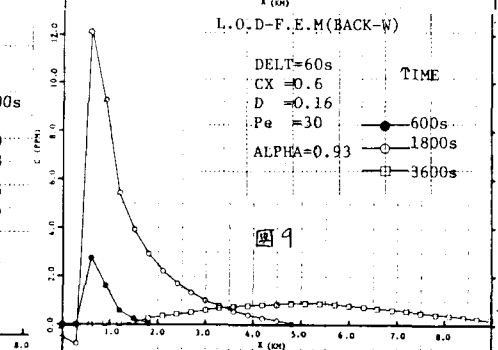
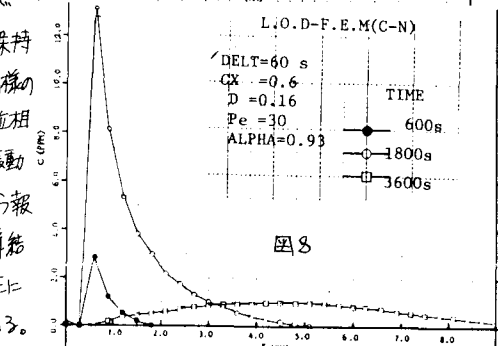
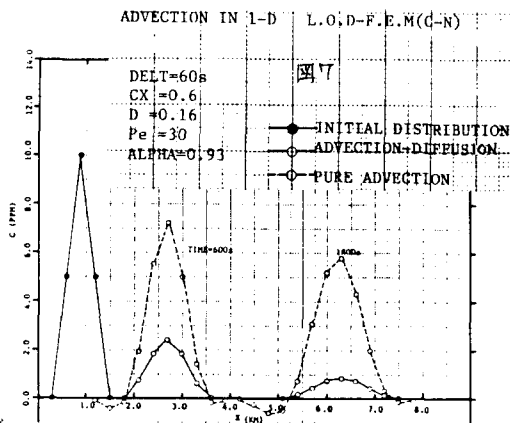
5. おわりに. 空間多次元問題に対して, LOD-FEM

(C-N)は, 位相誤差の少ない簡便な方法である。今後, 主方向の分散も調べ, 拡散数等の導入により, 数値分散を少なくする手法を研究が予定である。

The Method

(1)Yanenko (1971): fractional step
 (2)北田 (1977): 変位法論文
 (3)Zienkiewicz (1978): FEM in
 Heinrich
 Eluid's, Wiley
 (4)Zlatev
 THOMSEN (1979): Int. J. of
 Num. Engin
 vol. 14 1051-1061

(5)CHUNG (1978): FEM in Fluids Dynamic, Macmillan (6)川原 (1977): 第2回海岸工学講演会



(5)CHUNG (1978): FEM in Fluids Dynamic, Macmillan (6)川原 (1977): 第2回海岸工学講演会