

東京大学 学生員 ○池内 幸司
東京大学 正員 玉井 信行

1. はじめに

円曲部の水流の非平衡領域の挙動には、未知な点が多い。ここでは、主流の流下方向の変化に、ある仮定を導入し、2次流の発達あるいは減衰域における水位変化を求める手法を提案する。次に、Rozovskii¹⁾の実験結果を用いて主流速分布を定め、水位変化の予測値と実測値と比較する。

2. 基礎方程式

広矩形水路において、側壁の影響が小さく、水深と半径の比 $\frac{h}{r}$ が小さい場合の θ 方向の運動量方程式、連続式をそれぞれ z 方向に積分した結果は、次式で与えられる(記号は図-1参照)。ここに、 τ_{00} は底面における摩擦力を示す。

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \int_b^s v_r v_\theta dz)}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \int_b^s v_\theta^2 dz}_{(2)} = \underbrace{-\frac{\partial S}{r \partial \theta} g r h}_{(3)} - \underbrace{\frac{r \tau_{00}}{\rho}}_{(4)} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_b^s v_\theta dz + \frac{\partial}{\partial r} (r \int_b^s v_r dz) = 0 \quad (2)$$

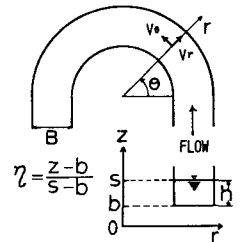


図-1 水路模式図
および記号の説明

3. 解析上の仮定

① v_θ の z 方向分布は、対数則に従うものとする。

$$v_\theta = v_{cp} \left[1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} (1 + \ln \eta) \right] = v_{cp} f(\eta) \quad (3)$$

ここに、 v_{cp} は z 方向に積分して求めた平均流速、 C はシェジエの抵抗係数、 κ はカルマン定数である。

$$\textcircled{2} v_r = \frac{h}{r} v_{cp} [C_1(\theta) G(\eta) + \Theta(r, \theta, \eta)] \quad (4)$$

とする。ここに、

$$G(\eta) = \frac{1}{\kappa^2} \left(\int \frac{2 \ln \eta}{\eta - 1} d\eta - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \int \frac{\ln^2 \eta}{\eta - 1} d\eta \right) \quad (\text{Rozovskiiの式}) \quad (5)$$

$$C_1 = \int_0^1 |v_r| d\eta \bigg/ \int_0^1 \frac{h}{r} v_{cp} |G(\eta)| d\eta \quad (6)$$

とする。 C_1 は厳密には、 r と θ の関数であるが、現段階では θ のみの関数と考える。これは、 v_r の成分中で、 r 方向への質量輸送に寄与しない成分と、完全発達域における v_r との比を表す。発達・減衰域においては、 r 方向への質量輸送の効果を無視することはできない。この効果を表すのが、式(4)の右辺第2項である。即ち、 $\int_0^1 G(\eta) d\eta = 0$ であるが、 $\int_0^1 v_r d\eta$ はこの領域では0でない。

③ v_{cp} の分布を $Q(\theta) r^{n(\theta)}$ で近似する。

④ $\tau_{00}/\rho = g v_{cp}^2 / C^2$ (g は重力加速度、 ρ は水の密度) とする。

4. 解析

式(2)も仮定①、②を用いて書き直すと次式になる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_{cp} h) + \frac{\partial}{\partial r} (h^2 v_{cp} C_2) = 0 \quad (7)$$

ここに、 $C_2(r, \theta) = \int_0^1 e(r, \theta, \eta) d\eta$ である。式(1)中の①項は、仮定①、②、③と式(3)より、

$$\textcircled{1} = C_1 A (2n+1) \frac{h^2}{r} v_{cp}^2 + 2C_1 A h I_r v_{cp}^2 - \delta v_{cp} \frac{\partial(v_{cp} h)}{\partial \theta} + \delta C_2 (n+1) \frac{h^2}{r} v_{cp}^2 + C_2 h \frac{\partial \delta}{\partial r} v_{cp}^2 \quad (8)$$

ここに、 $A = \frac{\sqrt{g}}{K^2 C} (0.8 - 0.5 \frac{\sqrt{g}}{K C})$ 、 $\delta(r, \theta, \eta) = \int_0^1 e d\eta / C_2$ である。式(1)中の②項は、

$$\textcircled{2} = \beta h \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} v_{cp}^2 \right) + \beta v_{cp} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_{cp} h) \quad (9)$$

となる。ここに、 $\beta = [1 + g / (K C)^2]$ である。

式(1)を式(8)、(9)、仮定④、⑤を用いて変形すると次式になる。

$$i_s = \frac{1}{(1 + \varepsilon Fr^2)} \left[(\beta + \varepsilon) \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{v_{cp}^2}{2g} \right) + Fr^2 \left\{ C_1 A (2n + 1) \left(\frac{h}{r} \right)^2 + 2C_1 A I_r \left(\frac{h}{r} \right) + \delta C_2 (n+1) \left(\frac{h}{r} \right)^2 + C_2 \frac{h^2}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \varepsilon i_b + \frac{g}{C^2} \right\} \right] \quad (10)$$

$\varepsilon = \beta - \delta$ 、 $I_r = \frac{\partial h}{\partial r}$ 、 $i_s = -\frac{\partial S}{r \partial \theta}$ 、 $i_b = -\frac{\partial b}{r \partial \theta}$ 、 $Fr^2 = \frac{v_{cp}^2}{g h}$ である。 $\varepsilon = 0$ 、 $C_2 = 0$ の場合には、式(10)は次式で与えられる。

$$\underbrace{\frac{\partial S}{\partial \theta}}_{T1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\beta}{2g} v_{cp}^2 \right)}_{T2} = \underbrace{-\frac{C_1 A (2n+1)}{g} \frac{h}{r} v_{cp}^2}_{T3} - \underbrace{2 \frac{C_1 A I_r}{g} v_{cp}^2}_{T4} - \underbrace{\frac{r}{C^2 h} v_{cp}^2}_{T5} \quad (11)$$

5. 計算例および考察

Rozovskii⁹⁾ の ex.1 より v_{cp} を定め、式(10)に代入して水位変化を求めた。 v_r の詳細なデータが得られなかつた為、 $\varepsilon = C_2 = 0$ 、 $I_r = \beta v_{cp}^2 / g r$ の条件下で(即ち、式(11)で)計算した。計算値を図-2に実測値を図-3に示す。境界条件として、上流端にて水位を与えた。 a 、 n は最小二乗法より求めた。中心線上では、計算値と実測値は比較的良く一致している。側壁付近では、計算値と実測値は一致していない。これは、式(1)が、側壁の影響が無いという事を前提条件にしている事と、 $\varepsilon = C_2 = 0$ とした事によるものであろう。出口付近では、計算値は実測値と比べて、内岸側では高め、外岸側では低めの値をとっている。現実には、わん曲部においては、内岸側から外岸側へとエネルギー $E = (g S + \frac{\beta}{2} v_{cp}^2)$ が輸送されている。しかるに、今回の計算では、 r 方向への質量輸送が無いという条件($\varepsilon = C_2 = 0$)の下に式(10)を解いてしまった為、エネルギー輸送の効果を十分に表現できなかつたものと思われる。図-4に内岸と中心線上における式(11)の各項の値の θ 方向の変化を示した。側壁付近では、左辺の各項の絶対値は、右辺の各項のそれよりも、はるかに大きい。中心線上においても側壁付近ほどではないが、同様な特性が見られる。これらの事より、式(10)においても、右辺のカッコ内の第1項が、大きな値をとる事がわかる。この項において、 $\varepsilon = 0$ と仮定した事が、計算結果に大きな影響を及ぼしているものと思われる。以上の結果をまとめると、わん曲部の非平衡領域における激しい水位変動は、 v_{cp} の変化と2次流による r 方向への質量輸送によるものであるという事が、推定できる。

<参考文献> ① Rozovskii, I. L., Israel Program, 41, 116, 140, 141, 1961

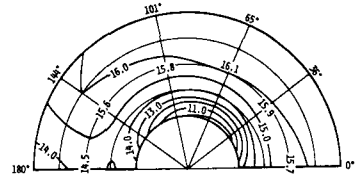


図-2 等水位線図(計算値)

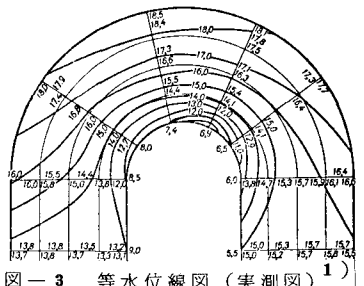


図-3 等水位線図(実測図)

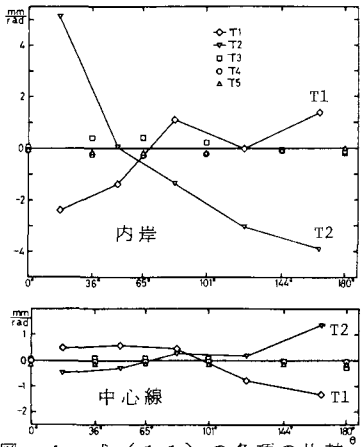


図-4 式(11)の各項の比較