

II-152 開水路に生ずる渦の挙動について

山梨大学工学部 正夏 萩原 能男

一般の河川において橋脚周辺に生ずる馬蹄形渦や水流方向を軸として河川横断面内に横に配列される渦列などがあることは良く知られている。これらの渦の形成にあたって開水路せん断流中にもともと存在する渦線(渦糸, 渦管)が流体粒子とともに移動レドのように変形していくのが重要な要素のように思われる。空気吸込渦の場合には渦の中心軸に渦度が集中しているのであるが, その原因は説明されていない。ヘルムホルツの渦定理「事実上粘性を無視できる流体の流れにおいては渦線は流体粒子とともに移動し, 消滅することはない」によって渦線の挙動を解析することが問題解決に役立つものと考え, ここに基礎的な例をあげて説明する。

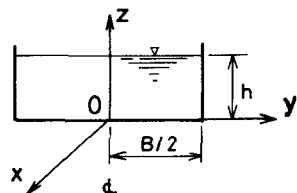


図-1 座標系

1. 使用文字の定義

図-1に示す水路幅 B , 水深 h の長方形断面開水路において, 座標軸として水路床にそって流下方向に x 軸, 横断方向に y 軸, 上向きに z 軸の直交三軸を採用する。また, 流速の各軸成分を u, v, w , 渦度の各軸成分を ξ, η, ζ , 流れの方向に生ずる定常波の波長を L とする。これらの諸水理量の無次元量を原則として一をつけて次のようにあらわすことにする。

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2\pi x/L, & \bar{y} &= 2y/B, & \bar{z} &= z/h, & \bar{u} &= u/u_0, & \bar{v} &= v/u_0, & \bar{w} &= w/u_0 \\ \beta &= B/L, & \gamma &= h/L, & \bar{\xi} &= \xi/u_0/h, & \bar{\eta} &= \eta/u_0/h, & \bar{\zeta} &= \zeta/u_0/h, & u_0 &= \text{最大表面流速} \end{aligned} \quad \text{----- (1)}$$

2. 平行流中の渦線とその挙動

$u = u(y, z)$, $v = 0$, $w = 0$ なる代表的な平行流(等流)においては, 渦度が $\xi = 0$, $\eta = \partial u / \partial z$, $\zeta = -\partial u / \partial y$ となるため, 渦線の方程式が

$$\partial u / \partial x \, dx + \partial u / \partial y \, dy = 0 \quad \text{----- (2)}$$

すなわち, $u = \text{const}$ となる。これは $y-z$ 面に描いた等流速線が渦線と一致することを意味する。したがって, 渦線は等流速 u で x 方向に平行移動するため変形して新たに渦度を生むようなことはない。例えば,

$$\bar{u} = (1 - \bar{y}^2) \bar{z} (2 - \bar{z}) \quad \text{----- (3)}$$

なる流れにおいては渦線の方程式が

$$(1 - \bar{y}^2) \bar{z} (2 - \bar{z}) = \text{const} \quad \text{----- (4)}$$

となり, 渦度は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= 0, & \bar{\eta} &= 2(1 - \bar{y}^2)(1 - \bar{z}) \\ \bar{\zeta} &= (4\beta/\gamma) \bar{y} \bar{z} (2 - \bar{z}) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (5)}$$

となる。図-2は式(3)で示される流れにおいて $\beta/\gamma = 1/2$ として渦線の形状と渦度 $\sqrt{\bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2}$ を図示したものである。側壁の水面付近と水路中心の底とに渦線が密集して渦度が大きくなっていることがわかる。

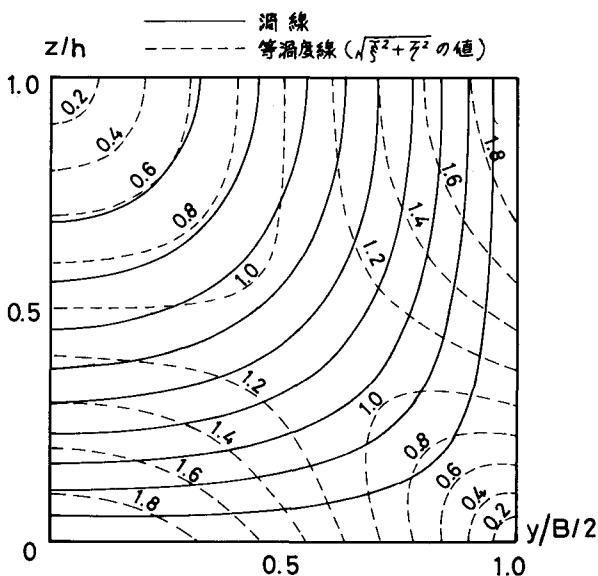


図-2 平行流中の渦線・等渦度線の一例

($\beta/\gamma = 1/2$)

3. 平行流中に何らかの流速変化が生じた場合の渦の挙動

平行流中に何らかの原因で二次流が生じた場合には式(2)の関係は成立しなくなり、渦線は変形しながら流体粒子とともに移動する。その変形によりx軸方向の渦成分も生じ、また渦線が集中し渦度の値が急増すれば強力な渦が発生することになる。例えば式(3)で示されるx方向の流速が何らかの原因で場所的に変化して

$$\bar{u} = (1 - \bar{y}^2) \bar{z} (2 - \bar{z}) (1 + u' \sin \bar{x}) \quad \text{----- (6)}$$

となれば、連続の条件よりy, z軸方向の流速も生じて

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= -\frac{1}{3} \pi \beta \bar{y} (1 - \bar{y}^2) \bar{z} (2 - \bar{z}) u' \cos \bar{x} \\ \bar{w} &= -\frac{4}{9} \pi \delta \bar{z}^2 (3 - \bar{z}) u' \cos \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (7)}$$

となる。このため、水面に定常波動が生じて

$$\frac{\delta}{\bar{z}^6 (3 - \bar{z})^3} = (1 + u' \sin \bar{x})^2 \quad \bar{y} = 0 \quad \text{---- (8)}$$

で示される微小な水深変化がおこる。このときの各軸方向の渦度成分は式(5)で示される平行流の渦度に次のものが加わる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{2}{3} \pi \beta \bar{y} (1 - \bar{y}^2) (1 - \bar{z}) u' \cos \bar{x} \\ \bar{\eta} &= 2 \left\{ (1 - \bar{y}^2) (1 - \bar{z}) - \frac{4}{9} \pi^2 \delta^2 \bar{z}^2 (3 - \bar{z}) \right\} u' \sin \bar{x} \\ \bar{\zeta} &= \left\{ \frac{2}{3} \pi^2 \delta \beta \bar{y} (1 - \bar{y}^2) + \frac{4\delta}{\beta} \bar{y} \right\} \bar{z} (2 - \bar{z}) u' \sin \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (9)}$$

この付加されるそれぞれの渦の等渦度線を図示すれば 図-3, 4, 5 となる。

図-3に示されるx軸方向を軸とする渦は水路の底に渦度が集中し、 $y > 0$ で正の値、 $y < 0$ で負の値をとり、左右で渦の回転方向が逆になる。また、 $\cos \bar{x}$ の値によって、その強弱・符号も変化する。

図-4はy軸方向を軸とする渦成分の渦度を水路中心($y=0$)でみたものである。x軸方向に波長Lを周期として水面付近に回転方向の異なる正負の渦が交互に発生し、その直下に水面とは逆回転で強さが1/2の渦が発生していることがわかる。

図-5はz軸方向を軸とする渦度成分の分布を示し、x方向に波長Lの周期で正負の渦が交互に現われ、渦中心(渦度の値の大きいところ)は側壁の近くに生じている。 $y > 0$ 、 $y < 0$ で δ の符号が変化するため、渦の回転方向が右岸と左岸で反対になり、x軸に関して対称になる。

この例でもみられるように平行流に二次流が加わると渦線と等流速線とが一致せず、渦線は流下すると変形していくことになり、x方向の渦度成分も図-3のように発生してくる。開水路の渦の解明は、このように渦線の挙動を調べることによって明確になる。

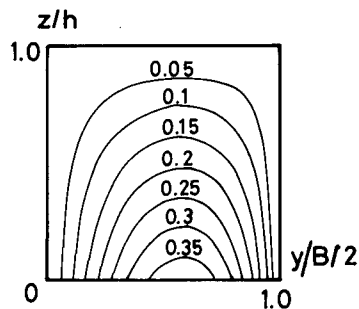


図-3 $\frac{u'}{2\pi\beta u' \cos \bar{x}}$ の値

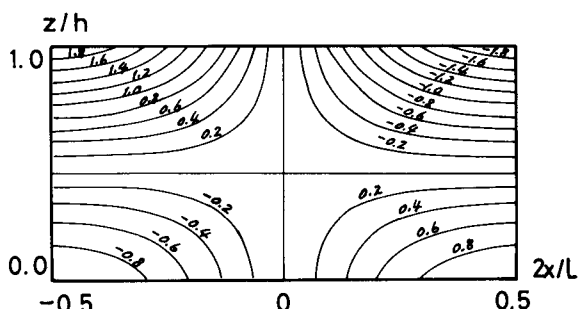


図-4 $\frac{z}{2u'}$ の値 ($y=0, \delta = 3/2\pi$)

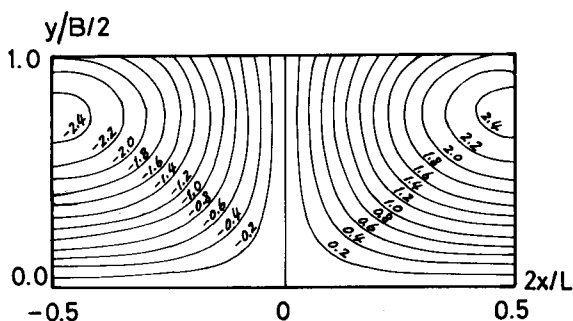


図-5 $\frac{z}{u' \bar{z} (2 - \bar{z})}$ の値 ($\delta = 3/2\pi, \beta = 3/\pi$)