

II-144 鉛直刃形せき越流量の理論的算定法

和歌山工業高等専門学校 正員 田中 光

〔I〕まえがき せきや水門の流量計算は水理学の入門書や参考書などにも記載されているがほとんどが実験式や実用公式のみであり、理論的な説明は省かれている。その主な理由は高度の理論を必要とするからである。本文は従来とは別の視野から、これらの理論を初等水理学の延長線上に求め、簡単にしてしかも実験式におとらぬ精度をもつ、実用性をも兼ねた理論解の開示を目的としている。従来せきの水理解析上の難点は、流量と水面形との同時決定を必要とする点にある。水面形の確定の為に支配断面を設定し、境界条件としてバランジェの法則を適用し、水路底の最高点を最少のエネルギーで流れるという条件で水深や流量が定められている。しかし支配断面の付近は急変流に属するため初等理論では不適当であるだけでなく、流速や圧力の分布、重力や遠心力をも考慮した理論解でも、かんじんのせき頂付近では実験値との適合性がよくないとされている。その他の方法には2次元ポテンシャル論を用いた解法もあり、最近では複素関数や有限要素法等も使われるが、反復法によるなど莫大な手数を要し、実用性に乏しい。本文はわかりにくい支配断面やバランジェの法則を避け、水面形を利用せず連続及エネルギー方程式の他に運動量の方程式をも同時に適用し、水平水路における長方形全幅せきの例をとって流量計算法を示す。

〔II〕解法の概要 図-1において断面ⅠおよびⅡについて、エネルギー(比エネルギー)及運動量(比力)の式をたてる。エネルギー損失を無視すると断面Ⅱから先の各断面での比エネルギーと比力(水平分力のみ)はすべて断面Ⅱにおける流水の外に等しくなればなり。したがって複雑な断面Ⅱの代りに、下流で流れが単純化した断面Ⅱ'で求めることにする。Ⅱ'の位置としては米国開拓局測定

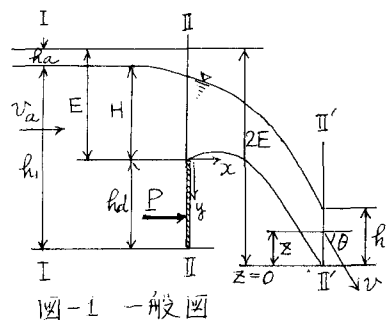


図-1 一般図

の鉛直刃形せきナツプ形状表から上下両側ナツプがなるべく平行し、しかもせきからの水平距離(x/E)が接近水頭(h_a/E)によって変らない鉛直断面として、表-1より下側ナツプで $y/E=1$, $x/E=1.7$ の位置を

	上側 ナツプ ($-y/E$)						下側 ナツプ ($-y/E$)						備考
	h_a/E	0.002	0.02	0.04	0.06	0.08	0.002	0.02	0.04	0.06	0.08		
にめたり降下角 θ とすれば、 $\tan \theta = \frac{0.28}{0.2} = 1.4$, $\cos \theta = 0.5812$, $\cos^2 \theta = 0.3378$ となる。	x/E	1.6	0.32	0.32	0.33	0.33	0.34	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	この間に $y/E=1.0$ あり
	ax/E	0.2	0.28	0.28	0.28	0.28	0.27	0.28	0.28	0.28	0.29	0.28	

表-1 鉛直刃形せきナツプ形状

(1) 連続の式: Ⅰ, Ⅱ断面について考える。単位幅の流量を q とし、平均流速を v_a とすると $q = (H + h_d) v_a = \int_0^H v dz \cos \theta = \int_0^H \sqrt{2g(2E - z)} \cos \theta dz \therefore \frac{q}{\sqrt{2g}} = (H + h_d) \sqrt{h_a} = \frac{2}{3} \cos \theta \{ (2E)^{3/2} - (2E - h)^{3/2} \}$ (1)

(2) 比力の式: i) Ⅰ断面の比力 $\frac{1}{w} \left[\frac{w}{2} (H + h_d)^2 + \rho (H + h_d) v_a \times v_a \right] = \frac{(H + h_d)^2}{2} + 2(H + h_d) h_a$ ii) Ⅱ断面のせき板にかかる比力は $\frac{P}{w}$ とす iii) Ⅱ断面の流水の比力の水平成分 $\frac{1}{w} \int_0^H \rho \Delta g (v \cos \theta) = \frac{1}{w} \int_0^H \rho (v dz \cos \theta) (v \cos \theta) = \frac{1}{w} \int_0^H \rho v^2 \cos^2 \theta dz = \frac{\rho \cos^2 \theta}{w} \int_0^H (\sqrt{2g(2E - z)})^2 dz = \cos^2 \theta \{ 4Eh - h^2 \}$ 上式中 $E = H + h_a$ であり、積分では後記の理由により常数的に扱っている。Ⅰ断面と(Ⅱ-Ⅱ')両断面の比力が等しく $\frac{(H + h_d)^2}{2} + 2(H + h_d) h_a = \frac{P}{w} + \cos^2 \theta (4Eh - h^2)$ (2)

なおベルヌーイの定理は上式中 $v = \sqrt{2gE}$ の形式により式(1),(2)に組込まれてある。両式には未知量は h_a, E, h, P の4個あるが、 q の任意の値 q' に対して E や P は定まり(後で説明)連立方程式(1),(2)を解けば h_a と h は求まる。これより

$q = h \sqrt{2g h_a}$ により q を求め、パラメータ q' と一致する迄計算をくり返す。

(3) せき板にかかる水平力 P : せき板の内面の水の運動は2次元ポテンシャル論に従うものとし、流線

綱図を参考にして、近似的な等流速線図を画く。先づせき頂Aから $\frac{1}{2}E$ の点Oを中心とし、半径 r の $\frac{1}{4}$ 円弧 $\widehat{GC}$ を引き、鉛直に常流水位まで延ばし、 $\widehat{GCD}$ をもって等流線図とみなす。水面との差の微小間隙は無視し、流速は直角とする。 $\widehat{GCD} = \frac{2\pi r}{4} + (H - \frac{E}{2}) = \frac{\pi}{2} \{ (hd + \frac{E}{2}) - z \} + (H - \frac{E}{2}) = (\frac{\pi}{2} - 1) \frac{E}{2} + (\frac{\pi}{2} hd + H) - \frac{\pi}{2} z$ となり、 $\widehat{GCD} = (f - \frac{\pi}{2} z)$ とおく。連続の式から $q = v \times \widehat{GCD} \therefore v = g / (f - \frac{\pi}{2} z)$

せき板面の分布圧力を p とし、ベルヌーイの定理を適用すると $E + hd = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$ であるから、 $\frac{p}{\rho g} = (E + hd) - z - \frac{g^2}{2g} / (f - \frac{\pi}{2} z)^2$ となり全圧力は P とすると $\frac{P}{\rho g} = \int_0^{hd} \frac{p}{\rho g} dz = \int_0^{hd} (E + hd) dz - \int_0^{hd} \frac{g^2}{2g} / (f - \frac{\pi}{2} z)^2 dz$
 $= \int_0^{hd} \frac{g^2}{2g} / (f - \frac{\pi}{2} z)^2 dz = \frac{1}{2} (E + hd)^2 - \frac{g^2}{2g} \int_0^{hd} \frac{1}{(f - \frac{\pi}{2} z)^2} dz$
 $\therefore \frac{P}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} - \frac{g^2}{\pi g} \{ \frac{1}{f - \frac{\pi}{2} hd} - \frac{1}{f} \}$ (3)
 ただし $P_0/\rho g = \frac{1}{2} (E + hd)^2 - \frac{1}{2} E^2$, $f = (\frac{\pi}{2} - 1) \frac{E}{2} + (\frac{\pi}{2} hd + H)$
 したがって P , P_0 , f は E と同様パラメータ g を指定すれば定まり、以後に水には (f) をつけて区別する。

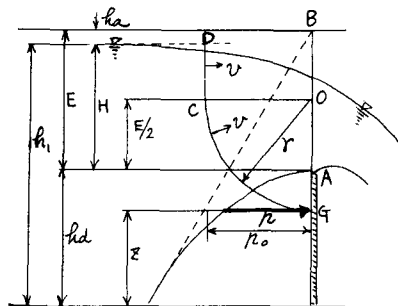


図-2 近似等流速線図

〔Ⅲ〕計算 $\cos \theta = 0.5812$, $\cos^2 \theta = 0.3378$, $w = 1.0$ とす

(1) 計算式: 式(1)を変形し $h = 2E' - \{ (2E')^{3/2} - \frac{3}{2} \frac{(H + hd)}{\cos \theta} \sqrt{ha} \}^{2/3} \therefore h = 2E' - \{ 2.828 E'^{3/2} - 2.5807 (H + hd) \sqrt{ha} \}^{2/3}$ (4)

式(2)で $S_1 = \frac{(H + hd)^2}{2 \cos^2 \theta}$, $S_2 = \frac{2(H + hd)}{\cos^2 \theta}$ とおけば $h^2 - 4E'h + (S_1 - \frac{P}{\rho g \cos^2 \theta}) + S_2 ha = 0$ となり根 h を求めると

(2) 計算例 $h = 2E' - \{ 4E'^2 - (S_1 - \frac{P}{\rho g \cos^2 \theta}) + S_2 ha \}^{1/2}$ (5)

鉛直及形せきのせき高 $hd = 0.75$ m, 越流水深 $H = 0.45$ m のときの越流量を求める。

解法: $\cos^2 \theta = 0.3378$, $S_1 = \frac{(H + hd)^2}{2 \cos^2 \theta} = 2.1314$, $S_2 = \frac{2(H + hd)}{\cos^2 \theta} = 7.1048$

次にパラメータ $g' = 0$ とおくと $ha' = \frac{g'}{h_1} = 0$, $ha' = \frac{g'}{2g} = 0$, $E' = H + ha' = 0.45$
 $P_0' = \frac{1}{2} (E' + hd)^2 - \frac{1}{2} E'^2 = 0.6187$, $f' = (\frac{\pi}{2} - 1) \frac{E'}{2} + (\frac{\pi}{2} hd + H) = 1.7565$, $P' = P_0' \frac{E'}{\pi g} \{ \frac{1}{f' - \frac{\pi}{2} hd} - \frac{1}{f'} \}$
 $= 0.6187$, 以上でパラメータ関連のデータを終り連立方程式の根を求める。

以下整理上式(4),(5)から求めた根 h をそれぞれ h_4 , h_5 とする。

i) $ha = 0$ とおいて: 式(4)より $h_4 = 2E' - \{ 2.828 E'^{3/2} - 2.5807 (H + hd) \sqrt{ha} \}^{2/3} = 0$

式(5)より $h_5 = 2E' - \{ 4E'^2 - S_1 + \frac{P}{\rho g \cos^2 \theta} - S_2 ha \}^{1/2} = 0.1857$

ii) $ha = 0.01$ とおいて: 前と同様の計算で $h_4 = 0.2336$, $h_5 = 0.2373$ となり、図-3のように横軸に ha , 縦軸に h とし、直線 h_4 と h_5 の交点 $ha = 0.0107$, $h = 0.24$ はパラメータ $g' = 0$ のときの根である。こゝより $g = h_1 \sqrt{2g ha} = 0.549$

次に $g' = 0.549$ にとって前と同様にして根を求めると $g = 0.556$ となつて、ほぼ前と同値になるのて後の g をとつて、 $g = 0.556$ m/s とおつて越流量とする。この値をJIS公式 $g = KH^{3/2}$, $K = 1.785 + \frac{0.00295}{H} + 0.237 \frac{H}{hd}$ による値 0.584 m/s と比較すると $\alpha = \frac{0.556}{0.584} = 0.952$ (差4.8%) となる。以上は $H/hd = \frac{0.45}{0.75} = \frac{3}{5}$ の場合であつたが、 $H = 0.15$ m となつた

$H/hd = \frac{1}{5}$ のときは $\alpha = 0.944$ (差5.6%), $H = 0.75$ m で $H/hd = \frac{5}{1}$ のときは $\alpha = 0.986$ (差1.4%) となつて、かなりの精度に達しているのて、理論としては妥當と考える。実用化にはナツプ関係、せき上部の近似等流曲線のとり方、摩擦損失等のロス、その他種々の要素が考えられるが、こゝでは補正の必要があらう。或は単に流量係数1.04がけるのもよい。

〔Ⅳ〕おわりに 本文は長方形全幅せきの例であつたが、本理論によればせき板に作用する水平方向の合力と越流後のナツプ特定部分の降下角、平行性、圧力の状況が捕捉出来れば流量を求めるので、こゝでも測定することにより、他の複雑な形状のせきにも応用出来るはずである。また同じ原理は水門セオリアイスにも適用可能であり、せきの場合との相違は端末部分の条件の違いのみとなる。また跳水現象についても興味ある結果が得られる。

参考文献: 田中光. 跳水現象の把握に関する考察(55年度土木学会関西支部講演概要)

田中光, 小池一臣 gate 流出量の理論的算定(56年度土木学会関西支部講演概要)

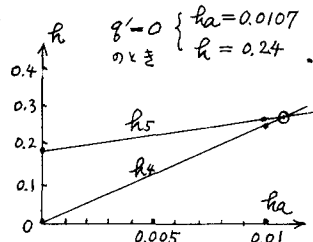


図-3 $ha-h$ 算定図