

II-143 円頂せきを越える流れの支配断面と水面形状

長岡技術科学大学建設系 正会員 ○福島祐介
東京工業大学工学部 正会員 福岡捷二

1. はじめに 円頂せきを常流から射流に移行途中で支配断面を生ずる流れは、流線の曲がりが無視できない急変流である。このような急変流の支配断面の特性を知り、水面形を計算するためには、流速分布・圧力分布に対する流線の曲がりの影響を正しく評価する必要がある。従来、円頂せきを越える流れに対しては、流線が同心円状であるとして底面と直交方向の流速成分を無視して解析が行なわれてきた^(1,2)。本研究は、底面と直交方向の流速成分を考慮して流速分布と圧力分布を求め、これらを用いた水面形方程式によって急変開水路流の支配断面と水面形について検討を行なうものである。

2. 理論 円頂せきを越える流れの模式図を図1に示す。流れは重力効果が卓越する急縮流であり、流れのほぼ全域で非粘性流と見なすことができる。最初に、流速分布と圧力分布を非粘性理論により求め、次に、この結果を用いて壁面せん断力を考慮した急変流の水面形方程式を導く。図1の円頂座標系で、十分発達した乱流の基礎方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(uvr) + uv = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \tau_{\theta r} r \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial uv}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v^2 r - \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rr} r \quad (3)$$

ここで、 $\tau_{\theta r} = -\rho u'v'$, $\tau_{rr} = -\rho v'^2$ であり、他のレイノルズ応力は無視している。 Ω は重力ポテンシャル($=gr \cos \theta = g(R+z) \cos \theta$)である。

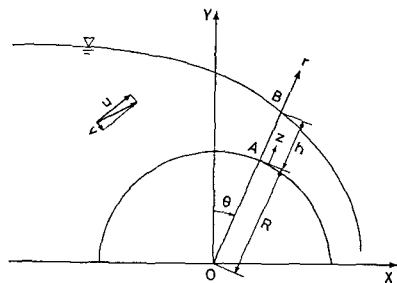


図1 円頂せきを越える流れ

非粘性、渦なしの条件のもとでは、式(2)、(3)は、次の渦なし条件式、ベルヌイの式と同等である。

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} ur = 0 \quad (4)$$

$$\frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + \frac{\Omega}{g} = \text{const.} \quad (5)$$

ここで、 $w^2 = u^2 + v^2$ である。流線が同心円状をなすと仮定した従来の理論による流速分布は、式(4)において、 $\partial v / \partial \theta = 0$ とおき、積分することによって求まり、

$$ur = \text{const.} \quad (6)$$

$$v = 0 \quad (7)$$

となる。しかし、流速分布は $\partial v / \partial \theta = 0$ を仮定することなく定めることができる。式(1)と式(4)から、未知数 u, v のいずれかを消去すると、それぞれ u と v について2階線形偏微分方程式が得られる。これらは、変数分離法による解法が可能であり、解は一般に無限級数の和であらわされる。ここでは解を1項のみで近似し、次のようにおく。

$$\frac{u}{\bar{u}} = h^* \lambda \frac{(1+z^*)^{-1+\lambda} + (1+z^*)^{-1-\lambda}}{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}} \quad (8)$$

$$\frac{v}{\bar{u}} = h^* \lambda \frac{dh^* (1+h^*)^{-1+\lambda} + (1+h^*)^{-1-\lambda}}{d\theta [(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}]} \left\{ (1+z^*)^{-1+\lambda} - (1+z^*)^{-1-\lambda} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\bar{u} (=g/h)$: 断面平均流速、 g : 単位幅流量、 $h^* = h/R$, $z^* = z/R$, R : 底面の曲率半径である。

λ は本来、境界条件により定まる固有値であるが、ここでは実験定数と考えておく。

圧力 p を静水圧 p_0 および静水圧からの差圧 p' であらわす。このとき、静水圧 p_0 と差圧 p' は、ベルヌイの式から次のようにあらわされる。

$$p_0 = \rho g (h - z) \cos \theta \quad (10)$$

$$p' = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (11)$$

ここで、 u_1, v_1 は水面 ($z=h$) での流速である。

以上のように求められた流速分布、式(8)、(9)、圧力分布、式(10)、(11)を θ 方向の運動方程式(2)に代入し、底面から水面まで積分すると、急変流の水直形方程式が得られる。

$$\frac{dh^*}{d\theta} = \frac{(1+h^*) \sin \theta - i_f}{\cos \theta - 4G\lambda^3 \frac{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}}{(1+h^*)^3 \{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \}^3}} \quad (12) \quad \text{ここで、} \quad i_f = \frac{T_0 / \rho}{gh} \quad (13)$$

$$G = g^2 / g R^3 \quad (14)$$

支配断面の位置と水深(限界水深)は水面形方程式(12)の分母、分子が同時に零になる条件から求める³⁾。このとき、支配断面の位置で1になるような急変流のフルード数 Fr を新たに定義する。漸変流のフルード数を F とすれば、急変流のフルード数 Fr は式(12)の分母=0で $Fr=1$ の条件から、

$$Fr^2 = 4\lambda^3 h^{*3} \frac{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}}{(1+h^*)^3 \{ (1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda} \}^3} \quad F^2 = \frac{g^2}{g h^3 \cos \theta} \quad (15) \quad (16)$$

3. 実験 理論の適合性を検討するため、実験を行なった。実験条件を表1に示す。図2はせき頂 ($\theta=0$) で測定した流速 w と差圧 p' を理論値と比較したものである。この場合、式に含まれる指数 λ を0.42とすると、理論は実験値と良く一致する。図3は漸変流のフルード数式(16)と急変流のフルード数式(15)の分布を示す。漸変流のフルード数はせき頂より上流($\theta < 0$)で1より大きくなっているのに対し、急変流のフルード数はせき頂より下流で1になっており支配断面の位置に対して力学的に正しい解釈を与える。図4は、壁面での無次元差圧 $p_w^* (= p_w' / \frac{1}{2} \rho u_0^2, u_0$: せき頂の平均流速) の実験値を式(11)、ポテンシャル流の数値計算、岩崎の理論値¹⁾と比較したものである。図5は、水面形である。底面と直交方向の流速成分を無視した岩崎の理論は、差圧に関して実験値より小さい値を与える。

表1 実験条件

底面の曲率半径 R (cm)	25.1
水路幅 B (cm)	40.0
流量 Q (l/s)	35.7
水温 T (°C)	12.2
レイノルズ数 Re	7.20×10^4
G	0.0514

本理論ではこの点が改善されており、実験値および数値計算結果を良く説明する。水面形に対しては理論と実験値は完全には一致していないが、これは従来の理論と比較するために摩擦係数を零としていることによる。以上のように底

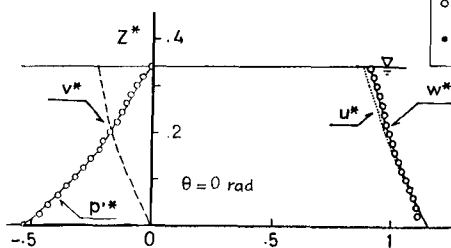


図2 流速分布と圧力分布

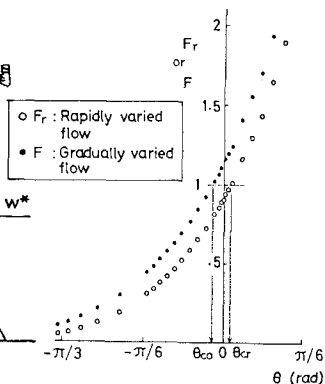


図3 フルード数

面と直交方向の流速成分を考慮することにより、円頂せき上の流れに対してより適切な理解が得られた。

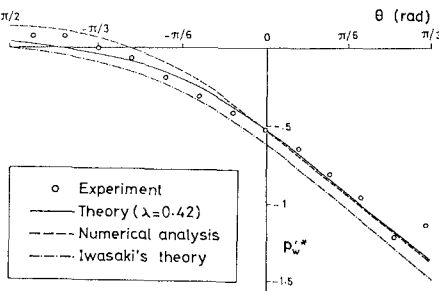


図4 壁面での無次元差圧

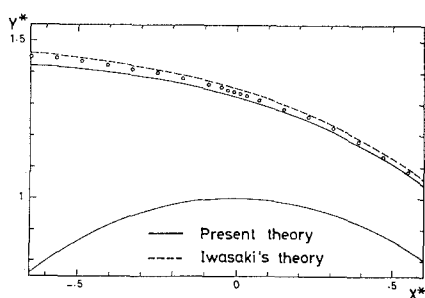


図5 水面形状

1) 岩崎敏夫: 土木学会論文集 第43号, 1457.
2) 井田至春: 土木学会論文集 第32号, 1456.
3) 岩佐義朗: 水工学, 朝倉, 1967