

中央大学 正員 川原 睦人
 ○三井造船(株) 正員 平野 廣和

1. はじめに

近年、構造物の多様化や大型化によって、構造物周辺の風の流れが複雑な挙動を示すようになって来ている。特に高架橋・大スパン橋・吊橋等では、風の流れの挙動を正確に把握することが必要不可欠である。しかし、ほとんどの場合この挙動を知るには風洞実験等による解析が唯一の方法である。このような背景には、適切な数値解析手法が確立していないことにある。そこで、本論では有限要素法を用いた数値解析手法を提案する。

本解析手法を高レイノルズ数の問題である、円柱回りの風の流れの問題に適用したところ、乱流剥離の現象を数値的に再現することができた。

2. 圧縮性を考慮した流れの基礎方程式

温度が一定であると仮定し、圧縮性が存在する流体の状態方程式を式(1)に、質量保存式を式(2)にそれぞれ次のように定義する。

$$P = P(\rho) \quad \text{----- (1)} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = (\rho u_i)_{,i} = 0 \quad \text{----- (2)}$$

ここでPは圧力、 ρ は密度、 t は時間、 u_i は流速である。式(1)を時間 t で全微分する。

$$\frac{DP}{Dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{D\rho}{Dt} \quad \text{----- (3)}$$

また式(2)は次のように変形される。

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho u_{i,i} \quad \text{----- (4)}$$

式(3)に式(4)を代入し、整理すると、式(5)が求まる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i P_{,i} + C^2 \rho u_{i,i} = 0 \quad \text{----- (5)}$$

ここで、 C^2 は次のように定義される。

$$C^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad \text{----- (6)}$$

もし、 C^2 が無大となる時、 $\frac{DP}{Dt}$ が有限の値を取るならば、 $u_{i,i} = 0$ となる関係を保つことができる。 C^2 を無大とすることにより、非圧縮の流れを表現することが可能となる。

運動方程式は、式(7)のように与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot u_{i,j} \right) + P_{,i} - \mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \rho f_i = 0 \quad \text{----- (7)}$$

式(5)及び式(7)で ρ と C が一定であるとし、それぞれの式を ρ で割り、 $P = \frac{P}{\rho C}$ とすることにより、式(7)より式(8)が、式(5)より式(9)が求まる。ここで、 ν は分子粘性係数、 f_i は外力を表わす。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot u_{i,j} + C P_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f_i = 0 \quad \text{----- (8)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i \cdot P_{,i} + C u_{i,i} = 0 \quad \text{----- (9)}$$

式(8)の運動方程式と、式(9)の連続方程式とを連立させて解くことを検討する。境界条件は次の条件を用いる。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ on } S_1, S_i = (P \delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j = \hat{S}_i \text{ on } S_2, P = \hat{P} \text{ on } S_4 \quad \text{----- (10)}$$

3. 有限要素法

形状関数は各未知数 u_i, P に対して、3角形3節点1次要素を用いる。式(8)・式(9)に重み関数を乗じて領域 V で積分を行なう。さらに時間方向に対しては、2段階ラックス・ウエンドロフ法を用いる。

$$\text{Step1: } \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (K_{\alpha\beta\gamma} u_{\gamma}^n u_{\gamma}^n + S_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - C H_{\alpha\beta} P_{\beta}^n) \quad \text{----- (11)}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} P_{\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{\alpha\beta} P_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (C B_{\alpha\beta} u_{\beta}^n + A_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta}^n P_{\gamma}^n) \quad \text{----- (12)}$$

$$\text{Step2: } \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta}^n - \Delta t (\hat{\Omega}_{\alpha}^n + S_{\alpha\beta} u_{\beta}^n + K_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta}^{n+1/2} u_{\gamma}^{n+1/2} - C H_{\alpha\beta} P_{\beta}^{n+1/2}) \quad \text{----- (13)}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} P_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} P_{\beta}^n - \Delta t (C B_{\alpha\beta} u_{\beta}^{n+1/2} + A_{\alpha\beta\gamma} u_{\beta}^{n+1/2} P_{\gamma}^{n+1/2}) \quad \text{----- (14)}$$

境界	境界条件値
A-B	$u=50.0 \ v=0.0$
B-C	$v=0.0$
C-D	$v=0.0$
D-A	$v=0.0$
円柱	$u=0.0 \ v=0.0$

表-1 境界条件

係数	係数値
C	337.0
Δt	$7.5 \times 10^{-4} \text{ s}$
ρ	$0.13/9 \text{ kg/m}^3$
ν	$0.01 \text{ m}^2/\text{s}$
α	0.27

表-2 係数値

各係数マトリックスは
以下に示す。

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta) dV \\ K_{\alpha\beta\gamma} &= \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma) dV \\ A_{\alpha\beta\gamma} &= \int_V (\Phi_\alpha \Phi_{\beta,i} \Phi_\gamma) dV \\ H_{\alpha\beta} &= \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_\beta) dV \\ B_{\alpha\beta} &= \int_V (\Phi_\alpha \Phi_{\beta,i}) dV \\ S_{\alpha\beta} &= \nu \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,i}) dV \\ &+ \nu \int_V (\Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,i}) \delta_{ij} dV \\ \hat{\Omega}_{\alpha i} &= \int_{S_i} (\Phi_\alpha \hat{S}_i) dS \\ &- \int_V (\Phi_\alpha \hat{f}_i) dV \\ \tilde{M}_{\alpha\beta} &= \alpha M_{\alpha\beta} + (1-\alpha) \bar{M}_{\alpha\beta} \\ \bar{M}_{\alpha\beta} & \text{集中化行列} \end{aligned}$$

4. 数値計算例

台風等の強風下において、円柱に風がどのように作用するかを、本手法を用いて数値的に再現することを行なった。図-1に示す縦24m横72mの長方形流路内に、直径3mの円柱を置いたモデルを用いる。解析条件としては、無風状態の所に突然風

速50%の風が吹き始め、7.5秒が経過するまでを追跡した。境界条件は表-1に、方程式の各係数値は表-2に示す。

図-2,3は6.15秒、6.30秒の風速風向図である。カルマン渦が発生しているのがわかる。また図-4は、円柱の上半分の C_p の分布図である。 $Re=6.0 \times 10^5$ オーダーの乱流剥離の状態に、ほぼ等しい一列を見ることができる。

5. 終わりに

ここで提案した手法により、圧縮性を考慮した流体の流れ解析が可能となったと考える。特に風等の高レイノルズ数で、また現象時間が極めて短く、かつ乱流状態の現象に適用できることが可能であることがわかった。最後に、本論文の計算は中央大学大学院、児玉敏雄君の協力のもとに行なった。ここに記して感謝の意を表わす。

<参考文献> 川原・平野; 構造物周辺の風の流れの有限要素解析

第35回年講概要集, 1980

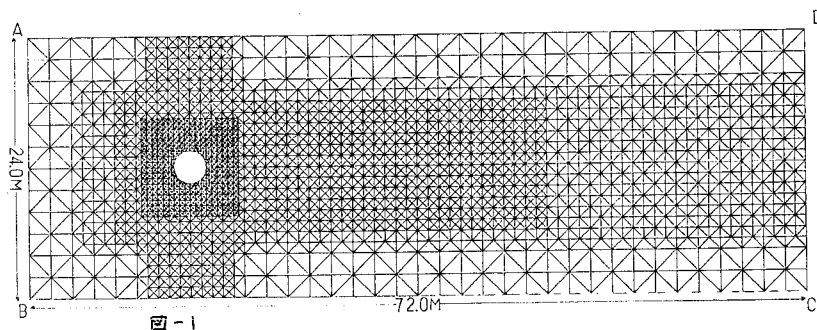


図-1

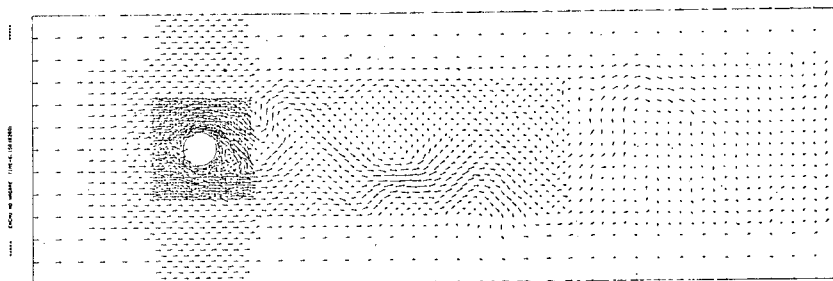


図-2

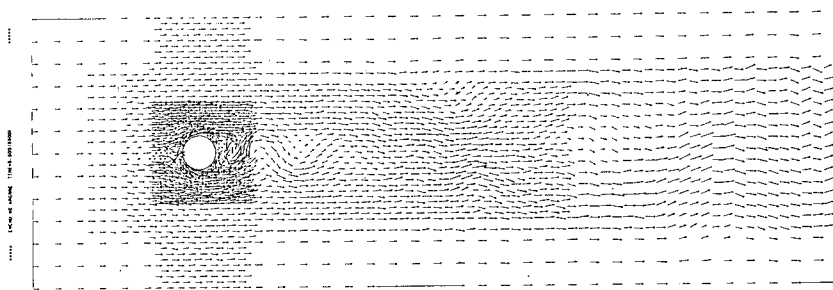


図-3

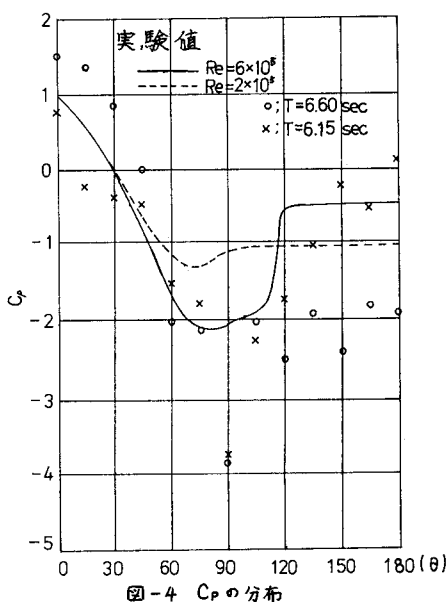


図-4 C_p の分布