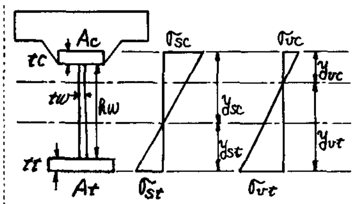
I -341　活荷重合成桁の最適設計での板厚の扱いについて

群馬高専　正員　平田　恭久
東京都立大学　正員　伊藤　文人

1. はじめに

筆者らは活荷重合成桁の主桁断面決定を例にして，活性な制約面上で最適解を探索する方法について研究を進めてきた。最適設計では探索する設計変数及び制約条件はなるべく主要なものに限っておく方が探索の能率が良い。また最適設計だけですべての断面寸法を決めることには若干無理がある。このため，①設計変数がある等号条件上に乗っている方が有利であることが明らかな場合にはこの等号条件を用いて設計変数を消去する。②目的関数への影響が極めて小さい設計変数や最適設計では決めにくい設計変数は他の設計上の要件から値を定めることを考えると，より実用性の高い最適解の探索アルゴリズムを作ることができる。鋼橋での部材断面は鋼板で構成されているが，1枚の板は板幅と板厚の2個の設計変数から成り立っている。若し板厚を等号条件で置き換えることができれば，板厚についての設計変数とこれに付随した制約条件式を消去することができる。このような目的から活荷重合成桁の主桁断面では板厚は薄い方が有利かどうかを調べ，この結果を用いて最適解の算出式を導くことにした。

2. 式を導く



設計変数 X_j $(j=1\sim n)$ の微少変化 dX_j による制約条件式 g_i $(i=1\sim m)$ の微少変化量 dg_i は $dg_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}dX_j$ $(i=1\sim m)$ であるが，図の主げた断面（設計変数は $h_w, A_c, A_t, t_w, t_c, t_t$ の6個）の dg_i は(1)式になる。最適解を探索するとき解が活性な制約面上にあるとすると $dg_c=0$，$dg_t=0$ である。この条件より(1)式から dA_c, dA_t を求めると(2)式が得られる。現在用いている g_c, g_t は①寸法制限　②応力度制限　③たわみ制限であるが，ここでは②の曲げ応力度で断面が定まる場合を取り上げると A_c, A_t の変化による g_c, g_t の変化は(3)式，板厚の変化による g_c, g_t の変化は t_c についてのみ例示すると(4)式となる（①t_c が変化しても床版位置は変化しない。②t_c, t_t は h_w に比べかなり小さいと仮定している）。(2)式で例えば $\frac{\partial g_c}{\partial t_c}dt_c$ は t_c の変化による変化応力度を示す。この意味で $d\sigma_c$，$d\sigma_t$ と表わしている。若し $d\sigma_c$，$d\sigma_t$ を修正応力度（例えば許容応力度との差）とみなすと dA_c，dA_t はフランジ断面積の修正量となり，(2)式について近似式を作成すると A_c, A_t の修正量を求める近似式が得られる。鋼桁断面積の変化量 dA_s は(5)式であるが，h_w = 一定の条件で板厚を厚くしたとき A_s が増加するかどうか調べるため，t_w, t_c, t_t について偏微分で表わすと $\frac{\partial A_s}{\partial t_w}$，$\frac{\partial A_s}{\partial t_c}$，$\frac{\partial A_s}{\partial t_t}$ が得られる。$\frac{\partial A_s}{\partial t}$ の符号が正ならば板厚 t を厚くするとき A_s が増加することになり，板厚が薄い方が有利となる。

$$dg_c=\frac{\partial g_c}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_c}{\partial A_c}dA_c+\frac{\partial g_c}{\partial A_t}dA_t+\frac{\partial g_c}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_c}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_c}{\partial t_t}dt_t$$

$$dg_t=\frac{\partial g_t}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_t}{\partial A_c}dA_c+\frac{\partial g_t}{\partial A_t}dA_t+\frac{\partial g_t}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_t}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_t}{\partial t_t}dt_t$$

g_c：圧縮側の制約条件，g_t：引張側の制約条件　------(1)

$$dA_c=\frac{d\sigma_t\frac{\partial g_c}{\partial A_t}-d\sigma_c\frac{\partial g_t}{\partial A_t}}{\frac{\partial g_c}{\partial A_c}\frac{\partial g_t}{\partial A_t}-\frac{\partial g_t}{\partial A_c}\frac{\partial g_c}{\partial A_t}}\qquad dA_t=\frac{d\sigma_c\frac{\partial g_t}{\partial A_c}-d\sigma_t\frac{\partial g_c}{\partial A_c}}{\frac{\partial g_c}{\partial A_c}\frac{\partial g_t}{\partial A_t}-\frac{\partial g_t}{\partial A_c}\frac{\partial g_c}{\partial A_t}}$$

ただし

$$d\sigma_c=\frac{\partial g_c}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_c}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_c}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_c}{\partial t_t}dt_t$$

$$d\sigma_t=\frac{\partial g_t}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_t}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_t}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_t}{\partial t_t}dt_t$$

-----(2)

$$\frac{\partial g_c}{\partial A_c}=-\sigma_{sc}\left(\frac{1}{A_s}+\frac{y_{sc}^2}{I_s}\right)-\sigma_{vc}\left(\frac{1}{A_v}+\frac{y_{vc}^2}{I_v}\right)$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial A_c}=\sigma_{sc}\left(\frac{1}{A_s}-\frac{y_{sc}\cdot y_{st}}{I_s}\right)+\sigma_{vc}\left(\frac{1}{A_v}-\frac{y_{vc}\cdot y_{vt}}{I_v}\right)$$

$$\frac{\partial g_c}{\partial A_t}=\sigma_{st}\left(\frac{1}{A_s}-\frac{y_{sc}\cdot y_{st}}{I_s}\right)+\sigma_{vt}\left(\frac{1}{A_v}-\frac{y_{vc}\cdot y_{vt}}{I_v}\right)$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial A_t}=-\sigma_{st}\left(\frac{1}{A_s}+\frac{y_{st}^2}{I_s}\right)-\sigma_{vt}\left(\frac{1}{A_v}+\frac{y_{vt}^2}{I_v}\right)$$

-----(3)

$$\frac{\partial g_c}{\partial t_c}=\sigma_{sc}\left\{\left(1-\frac{A_c}{2A_s}\right)/y_{sc}-\frac{y_{sc}}{I_s}A_c\right\}+\sigma_{vc}\left\{\left(1-\frac{A_c}{2A_v}\right)/y_{vc}-\frac{y_{vc}}{I_v}A_v\right\}$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial t_c}=\sigma_{sc}\left\{\frac{A_c}{2A_s}/y_{sc}-\frac{y_{st}}{I_s}A_c\right\}+\sigma_{vc}\left\{\frac{A_c}{2A_v}/y_{vc}-\frac{y_{vt}}{I_v}A_c\right\}\quad\text{-----(4)}$$

$$dA_s=t_w\,dh_w+h_w\,dt_w+dA_c+dA_t\quad\text{-----(5)}$$

3. $\frac{\partial A_s}{\partial t_w}$，$\frac{\partial A_s}{\partial t_c}$，$\frac{\partial A_s}{\partial t_t}$ の値

(3)式で第1項（鋼桁断面の項）のみ取り上げるとプレートガーダーとなり　$\frac{\partial A_s}{\partial t_w}=\frac{h_w}{6}\left\{2+\frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}+\frac{\sigma_{st}}{\sigma_{sc}}\right\}$

t_c, t_t は h_w に比べかなり小さいとすると(6)式が得られる。(6)式で $\sigma_{sc} \doteqdot \sigma_{st}$ とみなすと $\frac{\partial A_s}{\partial t}$ は表に示す値となる。(3)式で第2項（合成断面の項）も入れると(6)式のような簡単な式は得られず，表に示す値が $\frac{\partial A_s}{\partial t}$ のおおよその大きさである。$\frac{\partial A_s}{\partial t}$ の符号は正であるが $\frac{\partial A_s}{\partial t_c}, \frac{\partial A_s}{\partial t_t}$ は $\frac{\partial A_s}{\partial h_w}$ に比べ約2ケタ小さい。腹板厚は薄くする方が有利であることは明らかであるが，フランジ厚がAsに及ぼす影響はかなり小さいので，実際の設計では最小厚にこだわらずに他の設計上の要件からフランジ厚を定めてもよいと考えられる。圧縮フランジが許容座屈応力度で定まる場合には許容応力度にフランジ幅が関係してくるので，板厚を薄くする方が有利となる。プレートガーダーの場合で $\frac{\partial A_s}{\partial t_c}$ は約1ケタ大きくなる。

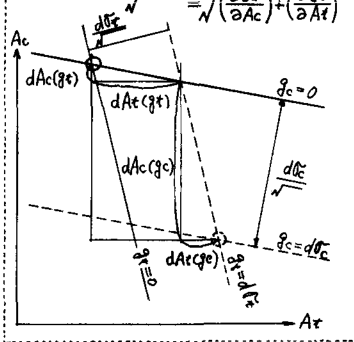
$$\frac{\partial A_s}{\partial t_c} = \frac{1}{6h_w}\left\{A_w\left(1+\frac{\sigma_{st}}{\sigma_{sc}}\right)+\left(A_w+3A_c\right)\left(\frac{\sigma_{st}}{\sigma_{sc}}-\frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}\right)\right\}$$
$$\frac{\partial A_s}{\partial t_t} = \frac{1}{6h_w}\left\{A_w\left(1+\frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}\right)+\left(A_w+3A_t\right)\left(\frac{\sigma_{sc}}{\sigma_{st}}-\frac{\sigma_{st}}{\sigma_{sc}}\right)\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

$\frac{\partial A_s}{\partial t}$ のおおよその値 (cm^2/cm)

	プレートガーダー	合成桁
$\frac{\partial A_s}{\partial t_w}$	$\frac{2}{3}h_w$	$\frac{2}{3}h_w$
$\frac{\partial A_s}{\partial t_c}$	$\frac{1}{3}t_w$	$(\frac{1}{3}\sim\frac{1}{2})t_w$
$\frac{\partial A_s}{\partial t_t}$	$\frac{1}{3}t_w$	$(\frac{1}{3}\sim\frac{1}{2})t_w$

次に板厚の変化による dA_c, dA_t を t_c の変化を例にして A_c, A_t 座標上に表わすと図に示すようになる。図を簡単にするため制約条件式を線形としている。(7)式は(2)式に対応したものであり，$\frac{\partial g_c}{\partial A_t}=\alpha\frac{\partial g_t}{\partial A_t}, \frac{\partial g_t}{\partial A_c}=\beta\frac{\partial g_c}{\partial A_c}$ とおいている。α, β の値は0.1~0.3程度である。板厚の変化 dt_c による変化応力度 $d\sigma_c, d\sigma_t$ を0にする（応力度一定の条件なので）ために A_c, A_t を dA_c, dA_t だけ変化させなければならないが，このとき $dA_c+dA_t>0$ となっている。図では◌印から○印へと移行する。dt_c の場合は $\frac{\partial g_c}{\partial t_c}>0, \frac{\partial g_t}{\partial t_c}<0$ でかつ $\frac{\partial g_c}{\partial t_c}+\frac{\partial g_t}{\partial t_c}>0$ であり，板厚を厚くするとき変化応力度の合計は増加する。

$$\sqrt{\quad} = \sqrt{\left(\frac{\partial g_c}{\partial A_c}\right)^2+\left(\frac{\partial g_c}{\partial A_t}\right)^2}$$



$$d\sigma_c=\frac{\partial g_c}{\partial t_c}dt_c,\quad d\sigma_t=\frac{\partial g_t}{\partial t_c}dt_c$$
$$\frac{\partial g_c}{\partial A_t}=\alpha\frac{\partial g_t}{\partial A_t},\quad \frac{\partial g_t}{\partial A_c}=\beta\frac{\partial g_c}{\partial A_c}$$
$$dA_c(g_c)=\frac{d\sigma_c}{-\frac{\partial g_c}{\partial A_c}(1-\alpha\beta)}$$
$$dA_c(g_t)=\frac{-\alpha d\sigma_t}{-\frac{\partial g_c}{\partial A_c}(1-\alpha\beta)}$$
$$dA_c=dA_c(g_c)+dA_c(g_t)$$
$$dA_t(g_c)=\frac{-\beta d\sigma_c}{-\frac{\partial g_t}{\partial A_t}(1-\alpha\beta)}$$
$$dA_t(g_t)=\frac{d\sigma_t}{-\frac{\partial g_t}{\partial A_t}(1-\alpha\beta)}$$
$$dA_t=dA_t(g_c)+dA_t(g_t) \quad \cdots\cdots(7)$$

4. 最適解の算出式

板厚の制約条件式について dg_i を求めると(8)式となる。3.で板厚は薄い方が有利であることが分かったが若し板厚の制約条件として最小厚を規定する最小板厚または最大幅厚比をとることにすると，t_w, t_c, t_t は活性な制約面上にあるので $dg_{tw}=0, dg_{tc}=0, dg_{tt}=0$ となる。これより dt_w, dt_c, dt_t を求めると(9)式が得られる。(9)式の dt を(1)式に代入し，$dg_c=0, dg_t=0$ とおいて求めた dA_c, dA_t を用いて(5)式より dh_w の項のみが残った(10)式を得る。(10)式で $\frac{\partial A_s}{\partial h_w}=0$ とおくと h_w を含んだ式が得られこれが最適解の算出式である。この式を h_w について解けば（A_c, A_t は $g_c=0, g_t=0$ により，t_w, t_c, t_t は $g_{tw}=0, g_{tc}=0, g_{tt}=0$ により定める）最適けた高が得られる。ここでは支間方向の断面変更点 x_i の探索を考慮していないが，x_i の探索を考慮しても同様にして最適けた高の算出式を導くことができる。このときは算出式の数は $N+1$ 個（N は断面変更点の数）になる。

$$dg_{tw}=\frac{\partial g_{tw}}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_{tw}}{\partial A_c}dA_c+\frac{\partial g_{tw}}{\partial A_t}dA_t+\frac{\partial g_{tw}}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_{tw}}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_{tw}}{\partial t_t}dt_t$$
$$dg_{tc}=\frac{\partial g_{tc}}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_{tc}}{\partial A_c}dA_c+\frac{\partial g_{tc}}{\partial A_t}dA_t+\frac{\partial g_{tc}}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_{tc}}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_{tc}}{\partial t_t}dt_t$$
$$dg_{tt}=\frac{\partial g_{tt}}{\partial h_w}dh_w+\frac{\partial g_{tt}}{\partial A_c}dA_c+\frac{\partial g_{tt}}{\partial A_t}dA_t+\frac{\partial g_{tt}}{\partial t_w}dt_w+\frac{\partial g_{tt}}{\partial t_c}dt_c+\frac{\partial g_{tt}}{\partial t_t}dt_t$$

g_{tw}, g_{tc}, g_{tt} ： t_w, t_c, t_t についての制約条件式 ……(8)

$$dt_w=\frac{1}{r_w}dh_w \text{ または } 0$$
$$dt_c=\frac{1}{2t_c\cdot r_c}dA_c \text{ または } 0$$
$$dt_t=\frac{1}{2t_t\cdot r_t}dA_t \text{ または } 0$$

r ：幅厚比 ……(9)

$$dA_s=\left\{\left(t_w+\frac{h_w}{r_w}\right)+\frac{d\sigma_c\left(\frac{\partial g_t}{\partial A_c}-\frac{\partial g_t}{\partial A_t}\right)+d\sigma_t\left(\frac{\partial g_c}{\partial A_t}-\frac{\partial g_c}{\partial A_c}\right)}{\frac{\partial g_c}{\partial A_c}\frac{\partial g_t}{\partial A_t}-\frac{\partial g_t}{\partial A_c}\frac{\partial g_c}{\partial A_t}}\right\}dh_w$$

ただし

$$d\sigma_c=\left(\frac{\partial g_c}{\partial h_w}+\frac{\partial g_c}{\partial t_w}\frac{1}{r_w}\right)dh_w,\quad d\sigma_t=\left(\frac{\partial g_t}{\partial h_w}+\frac{\partial g_t}{\partial t_w}\frac{1}{r_w}\right)dh_w$$
$$\frac{\partial g_c}{\partial A_c}=\left(\frac{\partial g_c}{\partial A_c}+\frac{\partial g_c}{\partial t_c}\frac{1}{2t_c\cdot r_c}\right),\quad \frac{\partial g_c}{\partial A_t}=\left(\frac{\partial g_c}{\partial A_t}+\frac{\partial g_c}{\partial t_t}\frac{1}{2t_t\cdot r_t}\right)$$
$$\frac{\partial g_t}{\partial A_c}=\left(\frac{\partial g_t}{\partial A_c}+\frac{\partial g_t}{\partial t_c}\frac{1}{2t_c\cdot r_c}\right),\quad \frac{\partial g_t}{\partial A_t}=\left(\frac{\partial g_t}{\partial A_t}+\frac{\partial g_t}{\partial t_t}\frac{1}{2t_t\cdot r_t}\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

5. おわりに

最適解を活性な制約面上で探索するとき板厚をどのように扱ったらよいかについて一つの方法を示したが，今後検討しなければならない点としては，①制約条件は g_c, g_t として応力度の制約条件を，g_{tw}, g_{tc}, g_{tt} としては最小板厚（他の設計上の要件から板厚を指定する場合も同じ）または最大幅厚比を取り上げたが，これ以外のものを制約条件としたときどうなるか ②ここで示した微分を用いて最適解の算出式を導きこれを解く方法と，目的関数の最小値を直接探索する方法とではどちらが探索方法として便利であるかがある。