I-340　ラーメン構造隅角部の構造感度分析

北海道工業大学　正会員　吉田紀昭

1. まえがき

ラーメン橋の梁と脚の交点部（隅角部）における腹板の応力分布は一様ではなく特に図1のような斜に交る場合は応力集中が起ると考えられる。その応力分布の解明は腹板の厚さはもちろん、補剛材の配置や寸法の決定、あるいは交点部に設ける円弧などの設計に必須である。有限要素法を用いればこれらの応力分布は十分な精度で知ることができ交点の鋭角側に応力集中があることが分る。この応力集中は適当な補剛材を配置することによって緩和することができるのであるがその配置の適確性を知るために集中応力度の感度分析を行った。構造感度分析[1]とは部材の寸法や配置などの設計変数の微少な変更によって変位、応力などの応答がいかに敏感に変化するかを解析することである。またこの解析は有限要素法解析を前提として行うと便利である。ここでは上記の応力集中部に注目して交点の鋭角側に配置された補剛材の部材断面積とフランジ断面積を設計変数として感度分析を行い、その結果を用いて応力の集中度合を最よく緩和することを目的とした非線形計画問題を定式化してその解を求めた。

2. 構造感度分析

線形静解析における構造方程式を　$Ku=P$　(1)

と書くとKは剛性行列、uは変位、Pは荷重である。荷重Pが設計変数の関数ではないと仮定して(1)式を設計変数D_iで微分すると

$$K\frac{\partial u}{\partial D_i} = -\frac{\partial K}{\partial D_i}u \qquad (2)$$

(1)式と(2)式の類似性から(2)式の右辺を荷重項とみなしてこれを疑似荷重ベクトルと呼ぶ。したがって感度係数$\partial u/\partial D_i$は同一の構造に疑似荷重が作用したときの変位として求められることになる。すなわち(1)式を解いた同じアルゴリズムを(2)式に適用することができ剛性行列Kは両式に共通であるから連立一次方程式の解法に用いた逆行列、またはLDU分解をそのまま用いることができる。問題は(2)式の右辺の疑似荷重ベクトルを求めることになる。すなわち剛性行列を各設計変数で微分し既知の変位ベクトルを掛ける計算を行なえばよい。ただし対象とする設計変数を持つ要素についてのみ行えばよく他の要素の微分形は全て零になることはもちろんである。剛性行列が陽な形で求められているものについてその微分形を求めることは簡明であり、ここではフランジおよび補剛材を単軸応力部材として棒要素を用いているのでその要素剛性行列（2次元）の設計変数（断面積A）での微分形を示す。節点iの座標をx_i y_i、部材長をL、ヤング率をEとし、

$$\lambda=(x_j-x_i)/L$$
$$\mu=(y_j-y_i)/L$$

とすると、

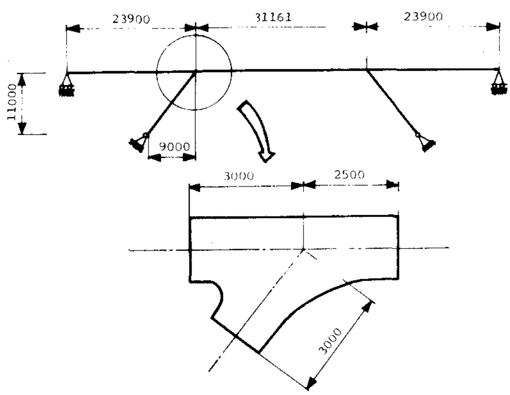
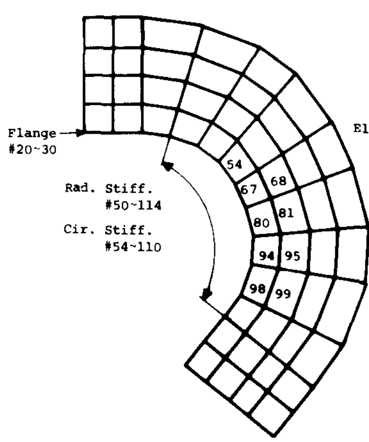


図-1　ラーメン橋の解析対象部分



Element	σ_e
54	1300
67	1799
68	1537
80	2160
81	1974
94	2380
95	2174
98	2284
99	2220

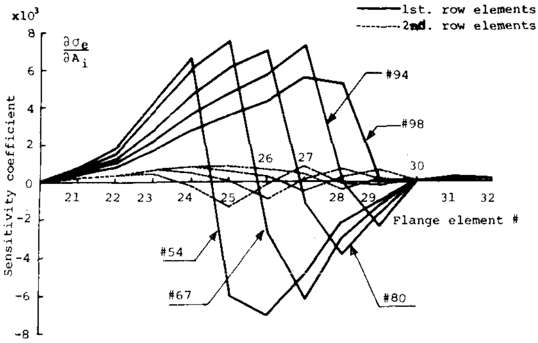
図-2　腹板の応力集中部分

$$\frac{\partial K_e}{\partial A}=\frac{E}{L}\begin{bmatrix}\lambda^2 & & & \text{Sym.}\\ \lambda\mu & \mu^2 & & \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2\end{bmatrix}$$

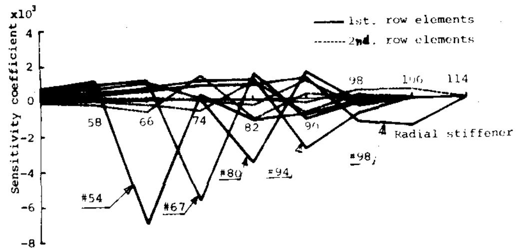
この微分形と両端の変位から要素の疑似荷重ベクトルを求め、構造全体の荷重ベクトルを構成したと同じ手順で全体疑似荷重ベクトルを作成すればよい。変位－歪関係歪－応力関係が線形関係であれば疑似荷重の下で求められる応力は応力の感度係数となる。ここでは応力集中部分の板要素の相当応力に注目しているので相当応力の感度係数の式を2次元平面応力場で導くと

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial D_i}=\frac{1}{2\sigma_e}\left\{(2\sigma_x-\sigma_y)\frac{\partial \sigma_x}{\partial D_i}+(2\sigma_y-\sigma_x)\frac{\partial \sigma_y}{\partial D_i}+6\tau_{xy}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial D_i}\right\}$$

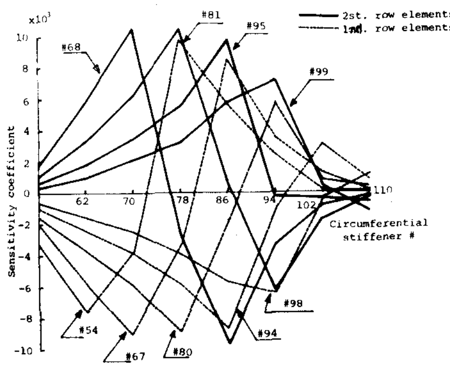
図2は応力集中部分で注目している腹板の要素と相当応力を示し、各フランジ断面および一層目の半径方向、円周方向の補剛材断面に対する感度係数が図3～5に示してある。フランジ断面に対する感度（図3）は一層目の板では著しく二層目ではあまり敏感ではない。しかしフランジの位置によって断面を増すと応力が上る部分があることに注意を要する。半径方向の補剛材（図4）はその位置によらずほぼ応力の低減に寄与することを示し、円周方向補剛材（図5）はその両側の要素に等しく影響し、しかもその位置によって応力を増大させる



図－3 フランジ断面積に対する感度



図－4 半径方向補剛材に対する感度



図－5 円周方向補剛材に対する感度

3. 最適補剛材

最適補剛材の設計として応力集中部分の板要素の応力の分散を最小にすることを目的とした非線形計画問題を定式化すると

$$\text{minimize}\quad F(x)=\sum_i(\bar{\sigma}-\sigma_i-v_{ij}x_j)^2$$
$$\text{subject to}\quad \sigma_i+v_{ij}x_j\leqq\sigma_a$$
$$x_j^l\leqq x_j\leqq x_j^u$$

ここに$\bar{\sigma}$は要素間の応力の平均、v_{ij}は要素iの部材jに対する感度係数、x_jは部材jの断面積の変量であり、制約条件は推定応力が許容応力σ_a以内であり、応力の線形近似が成立つ範囲の上下限x_j^l, x_j^uである。設計部分を限定してこの問題を解くと以下のようである。

現設計：フランジ断面積は一様に 160 cm², 補剛材断面積は一様に 64 cm²

フランジ断面（左上から）	160	162	166	173	178	101	80	96	136	160	160	160
円周材断面（〃）	55	47	85	96	80	64	57	63				
半径材断面（〃）	66	66	32	56	55	62	64	66	66			
推定相当応力（一層目の要素）	1846	1882	1914	2010	1987							

4. 結 論

応力集中部分の緩和の問題を感度分析と非線形計画法の組合せによって解く方向が確認され、高応力部分の剛性を下げ、周辺の剛性を上げる数量的判断の基準とすることができると思われる。

文 献 (1) 「最適化手法の構造設計・解析への応用」培風館, 1980 p.179