I -334　動的問題における最適性規準に基づく最適設計

京都大学　工学部　正員　古川　浩平
京都大学　工学部　正員　山田　善一
阿南工業高等専門学校　正員　横田　健一

1．まえがき

近年、数理計画手法を構造物の設計に応用した、いわゆる最適設計の研究が盛んに行なわれている。この手法を用いると、どのような構造物であっても、ひとたび数学モデルに置きかえてしまうと、あとは全く同じように解析・設計され、非常に一般的である。しかし最近の構造物の大規模化に伴ない、設計変数の数が非常に多くなった。このためいかに電子計算機が高速になったとはいえ、設計に要する計算時間が膨大なものとなり、かつその収束性に関しても問題がでてきた。この問題に対処するため、最適性規準に基づく最適設計が用いられるようになってきた。[1)2)] これらは主として静的問題を取り扱っている。動的問題は固有振動数やモードなど静的問題とは異なった取り扱いをする要素が多く、別な考え方をする必要がある。本研究は動的問題における変位を制約とする最適性規準法に基づく最適設計法を提案し、これに基づいて最適化を行なった例を報告するものである。

2．最適性規準の確立

動的外力をうける構造物の剛性はその固有値λで表わすことができる。構造物の j 次の固有値 λ_j と総重量 W は次のように表わすことができる。

$$\lambda_j = \omega_j^2 = \frac{\phi_j^t K \phi_j}{\phi_j^t M \phi_j} \quad \cdots\cdots \quad (1) \qquad W = \sum_{i=1}^{m} A_i l_i \rho_i \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

ここに、ω_j は j 次の固有円振動数、ϕ_j は j 次の固有モード、M は質量マトリックス、K は剛性マトリックス、A_i 、l_i 、ρ_i はおのおの i 要素の断面積、要素長、比体積重量、である。最小重量構造物を求めるには、目的関数 W と等号制約 $\lambda_j = \lambda_a$ より形成されるラグランジエ関数 L の停留値を求めればよい。ここに、λ_a は許容固有値である。断面積の変化が固有モードの変化に与える影響は小さいとして無視すると、

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega_j^2}{\partial A_i} = l_i \rho_i + \frac{1}{\nu}\,\frac{2\,\phi_j^t K_i \phi_j - \omega_j^2\,\phi_j^t M_i \phi_j}{A_i \cdot \phi_j^t M \phi_j} = 0 \qquad (3)$$

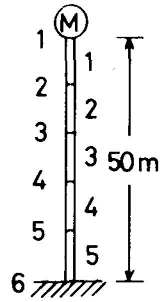
によって最小値が求められる。ここに、ν はラグランジエ乗数、M_i 、K_i はおのおの i 要素の質量、剛性マトリックス、である。ラグランジエ乗数は定数のため、全ての要素において式（3）に示す ν が等しくなることが最適性規準となる。式（3）は構造物がある一つのモードで振動している場合の解であるが、一般に構造物はある特定のモードだけで振動しているわけではないので、式（3）の ϕ_j のかわりに動的変位 x を用いて書きなおすと、

$$\nu_i = \frac{2\,x^t K_i x - \omega^2 x^t M_i x}{A_i l_i \rho_i \cdot x^t M x} \qquad \text{where} \qquad \omega^2 = \frac{x^t K x}{x^t M x} \qquad (4)$$

よって構造物の重量を最小にするという最適性規準は、式（4）に示す各要素の ν_i を全て等しくすることであるといえる。

3．最適性規準に基づく最適設計法

2．で述べた最適性規準は、制約として固有振動数を用いていた。土木構造物では変位制約の方が重要であるため、固有振動数制約を変位制約に変換する。構造物の変位は低次モード、中でも1次モードが寄与する割合が高いため、変位制約を課した点の変位 x_1 と1次の固有振動数 ω_1 とが反比例関係にあるとして、

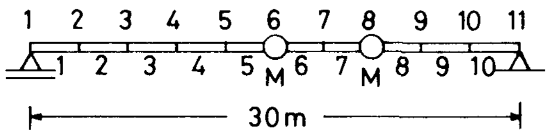


図－1　モデル1

$$\omega_a = x_1 \omega_1 / x_a \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

ここに、ω_a は構造物の許容振動数、x_a は許容変位である。各要素の断面変化量 δA_i は

$$\delta A_i = \beta \nu_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$



図－2　モデル 2

として求められる。ここにβは定数である。δA_i の変化による固有値の総変化量 $\delta\lambda$ は

$$\delta\lambda = \sum_i \frac{\partial\lambda}{\partial A_i} \delta A_i = \beta \sum_i l_i \rho_i \nu_i^2 = \delta\lambda_0 \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

ここに $\delta\lambda_0$ は各設計サイクルにおいて変化すべき固有値の総変化量であり、式（5）に示す変位を用いて次のように求めることができる。

$$\delta\lambda_0 = \omega_a^2 - \omega_1^2 = \omega_1^2 \{ (x_1 / x_a)^2 - 1 \} \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

式（7）と（8）より定数βが求まり、このβを式（6）に代入することによって、求める断面変化量 δA_i を得ることができる。よって次式に示すくり返し計算により最適解が得られる。

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \Delta\, \delta A_i^n \quad \cdots\cdots \quad (9)$$

4．計算例および考察

図－1、図－2に示す構造物を対象にして計算を行なった。表－1は図－1に示すタワーの頂点に M＝50ton の重量を載せ、頂点の許容変位を 10 cm、入力として本四のスペクトルを用い、最大加速度 200ガルで計算した例である。目的関数は鋼材の総重量である。初期値でばばらばらであった ν_i が最適解ではほとんど同じ値に収束している。その収束状況を表－2に示す。10回のくり返し計算でスムースに収束しているのがわかる。同じ構造物で要素を10にして計算した場合も10回で収束した。このように本方法では収束回数は設計変数の大きさとは関係のないことがわかる。表－3は図－2に示す橋りょうのモデルの計算結果である。入力は上下方向に100 ガル、質点 6 と 8 に M＝20 tonの重量と全断面に 1ton／mの分布荷重が載っている。変位制約は中点である質点 6 の鉛直変位を 5cm ととっている。全ての要素で ν_i が等しくなっている。これらの例に示したようにどのような構造物に対しても簡単に適用でき、非常に有効な設計法であることがわかる。

表－1　最適設計の結果　（モデル 1）

ELEMENT NO.		1	2	3	4	5
INITIAL	$I(m^4)$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
	ν_i	-0.045	0.366	1.091	2.186	3.796
OPTIMUM	$I(m^4)$	0.023	0.110	0.245	0.416	0.619
	ν_i	21.78	24.55	26.26	27.09	27.37

表－2　収束過程　（モデル 1）

CYCLE NO.	ELEMENT NUMBER 1	2	3	4	5	W (ton)
1	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	9.9
2	0.0008	0.0025	0.0075	0.0202	0.0502	33.4
3	0.0023	0.0101	0.0178	0.0318	0.0628	44.7
4	0.0064	0.0261	0.0556	0.0886	0.1287	71.2
5	0.0115	0.0511	0.1088	0.1803	0.2666	100.7
6	0.0163	0.0747	0.1623	0.2720	0.4036	123.1
7	0.0197	0.0922	0.2027	0.3418	0.5083	137.6
8	0.0216	0.1024	0.2268	0.3838	0.5715	145.6
9	0.0226	0.1076	0.2391	0.4054	0.6039	149.5
10	0.0231	0.1101	0.2450	0.4155	0.6192	151.3

表－3　最適設計の結果　（モデル 2）

ELEMENT NUMBER		1	2	3	4	5
OPTIMUM	$I(10^{-2}m^4)$	0.040	0.143	0.263	0.384	0.503
	ν_i	118.3	117.9	117.2	116.5	113.8
ELEMENT NUMBER		6	7	8	9	10
OPTIMUM	$I(10^{-2}m^4)$	0.521	0.474	0.358	0.192	0.054
	ν_i	116.7	116.1	116.9	117.7	118.0

5．あとがき

動的問題において変位を制約とする最適性規準を導き、それに基づいて最適設計を行った。その結果本設計法は設計変数が多い問題であっても収束が早く、非常に有効な設計法であることがわかった。

参考文献　1)　Venkayya, Computers and Structures, Vol.1, pp.265—309, 1971

2)　Gellatly ・Dupree, Introductory Report of 10th IABSE, pp.77—105, 1975