I-325　重回帰モデルによるダムの安全管理について

熊本大学工学部　正員　○三池亮次
同上　正員　小林一郎
北九州市役所　丹下恭一

1．はじめに　ダムはきわめて堅固な構造物であるが，一たんそれが崩壊するときの被害は甚大で，人命にかかわる問題であるので，ダムの力学的挙動を監視してその安全性を管理することは重要である。一般にアーチダムのクラウンにおいて計測されたたわみは，ダムの総合的変形を的確に表示するもので，ダムの安全性を管理するのに，もっとも有効な特性値である。アーチダムは水圧により変形しまた高次の不静定構造物であるから温度変化にも敏感である。そこで，たわみと水位および堤体温度の間に重回帰モデルを設定し，重回帰の構造の変化をみることによってダムの安全管理を行なうことが試みられた。たとえば主成分による重回帰分析，一元配置の共分散分析の手法を応用すること，および非可逆的変形による経年変化を，時間θに関するいくつかの対数曲線を重畳した曲線で表わして検出する方法を提案してきた。また，中村は重回帰モデルにおける残差の動きに，極値的にみた品質管理の手法を応用している。近年，単回帰モデルにおける区間推定法を管理図法に応用する回帰管理図法が適用されている。

ここでは，ある期間における重回分析の結果を基準として，それの前後の信頼区間を求める理論とまた基準となる重回帰の構造と，それ以外の重回帰の構造に差があるかどうかの理論を展開し，この理論をあるダムの安全管理に適用し，安全管理を実施するに際してのいくつかの問題点を検討する。ここで提案の理論を用いると，安全性の判断が直截的であり，現場への応用性に優れていると思われる。

2．理論

(1) 重回帰モデルにおける残差の分散　確定変数マトリックス $\mathbb{X}$ ($n\times p$) とその従属変量ベクトル $\mathbb{y}$ ($n\times 1$) との間に線型回帰モデル

$$\mathbb{y}=\mathbb{X}\beta+\mathbb{e} \tag{1}$$

が成立するものとする。ここに β ($p\times 1$) は偏回帰係数であり，$\mathbb{e}$ ($n\times 1$) は偏差ベクトルで，その重さのマトリックスを $\mathbb{Q}$ ($n\times n$) とするとき，偏差 $\mathbb{e}$ は，その期待値と分散共分散マトリックスが

$$E[\mathbb{e}]=\mathbb{O}\ ,\quad Cov[\mathbb{e}]=\sigma^2\mathbb{Q}^{-1} \tag{2}$$

であるような正規分布に従うものとする。すなわち $\mathbb{e}\in n(\mathbb{O},\sigma^2\mathbb{Q}^{-1})$ とする。また β の不偏推定値を $\hat{\beta}$ とすると

$$\hat{\beta}-\beta=\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q}\mathbb{e}\ ,\quad \mathbb{S}_q=\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q}\mathbb{X}\ ,\quad \hat{\beta}=\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q}\mathbb{y} \tag{3}$$

であるから，残差 $\mathbb{v}$ は，式(1)と(3)を用いて，

$$\mathbb{v}=\mathbb{y}-\hat{\mu}=\mathbb{X}(\beta-\hat{\beta})+\mathbb{e}=(\mathbb{I}-\mathbb{X}\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q})\mathbb{e}\ ,\quad \hat{\mu}=\mathbb{X}\hat{\beta} \tag{4}$$

である。したがって $E[\mathbb{v}]=\mathbb{O}$ であり

$$\begin{aligned}Cov[\mathbb{v}]&=E[(\mathbb{I}-\mathbb{X}\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q})\mathbb{e}\mathbb{e}^{(t)}(\mathbb{I}-\mathbb{X}\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)}\mathbb{Q})]\\&=(\mathbb{Q}^{-1}-\mathbb{X}\mathbb{S}_q^{-1}\mathbb{X}^{(t)})\sigma^2\end{aligned} \tag{5}$$

次に，始めに与えられた確定変数 $\mathbb{X}$ とは異なる確定変数マトリックス $\mathbb{X}'$ ($n'\times p$) を式(1)の代りに用いる。す

なわち，

$$y' = X'\beta + e' \tag{6}$$

が成立するものとする。いま X' を用いたにもかかわらず，偏差ベクトル e および e' が同一の母集団に属し，同じ正規分布に従うものと仮定すると，

$$E[e'] = 0\,,\quad Cov[e'] = Q'^{-1}\sigma^2 \tag{7}$$

であり，かつ e と e' は互に独立の確率ベクトルで，

$$E[e'e^{(t)}] = 0 \tag{8}$$

とすると，残差

$$v' = y' - \hat{\mu}' = e' - X'(\hat{\beta} - \beta) = e' - X'S_q^{-1}X^{(t)}Qe\ ,\quad \hat{\mu}' = X'\hat{\beta} \tag{9}$$

であるから，$E[v'] = 0$ であり，その分散共分散マトリックスは，式(7)と(8)を用いて

$$E[v'] = E\left[(e' - X'S_q^{-1}X^{(t)}Qe)(e' - X'S_q^{-1}X^{(t)}Qe)^{(t)}\right]$$
$$= (Q'^{-1} + X'S_q^{-1}X'^{(t)})\sigma^2 \tag{10}$$

を得る。

(2) 重回帰モデルにおける残差 v と v' の信頼区間．　式(5)において Q の対角要素を q_α とし，$XS_q^{-1}X^{(t)}$ の対角要素を $D^{\alpha\alpha}$ とすると，残差 v の要素 v_α は

$$v_\alpha \in n\left\{0,\ \left(\frac{1}{q_\alpha} - D^{\alpha\alpha}\right)\sigma^2\right\} \tag{11}$$

したがって，

$$\frac{v_\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{q_\alpha} - D^{\alpha\alpha}\right)\sigma^2}} \in n(0, 1^2) \tag{12}$$

一方，残差平方和 $S_E \in \chi^2(n-p)$ であるから，信頼係数が95％の残差 v_α の信頼区間は，$t(n-p\,;0.05)$ を自由度が $n-p$ の t 分布の両側5％点とするとき

$$-t(n-p\,;0.05) \leqslant \frac{v_\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{q_\alpha} - D^{\alpha\alpha}\right)\frac{S_E}{n-p}}} \leqslant t(n-p\,;0.05) \tag{13}$$

である。同様に，式(10)において Q' の対角要素を q'_α，$X'S_q^{-1}X'^{(t)}$ の対角要素を $D'^{\alpha\alpha}$ とするとき

$$-t(n-p\,;0.05) \leqslant \frac{v'_\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{q'_\alpha} + D'^{\alpha\alpha}\right)\frac{S_E}{n-p}}} \leqslant t(n-p\,;0.05) \tag{14}$$

式(13)，(14)より，標準化された残差（不等式(13)と(14)の中央の値）を用いるときは，$\pm t(n-p\,;0.05)$ は管理限界となり，通常の管理図法と同様に安全性の判断が容易になる。

3. 適用．　ダムのたわみ δ と，水深 $h - h_0$，アーチフラウンの各断面の平均温度 t_i，温度こう配 α_i の間には，一般に，次の線形回帰モデル

$$\delta = k + \sum_i a_i t_i + \sum_i b_i \alpha_i + c_i (h - h_0)^2 + \sum d_i \log\left(\frac{1+\theta}{1+\theta_i}\right)$$

が設定される。対数項は経年変化で，その適用例は，講演時に発表する。