I-324　データの個数に注目した耐荷力の特性値決定法

筑波大学　構造工学系　正　藤野陽三
名古屋工業大学　工学部　正　長谷川彰夫

1. まえがき

構造部材の耐荷力Rにはばらつきがある。このばらつきを確率現象ととらえるならば，超過確率qに対応する耐荷力Rの統計的特性値R^*が存在する．設計規準で規定される基本耐荷力は本来，適当な超過確率qの値のもとで得られる特性値R^*にすべきものである．

耐荷力Rには種々の不確定要因が関与するが，各不確定要因の確率特性が完全に把握されていれば，超過確率qに対応する特性値R^*はユニークに決まる．しかしながら，現実には各要因について不完全な情報しか得られていない．すなわち，1つ1つの要因に関する情報は有限個のデータの形として通常与えられ，技術的・経済的等の理由によりデータ個数は不確定要因によってまちまちである．2次モーメント法をはじめ従来の特性値R^*の評価法において，各要因におけるデータ個数の多寡・不均一さに対する配慮はなされていなかった．

ここでは，特性値R^*を精度よく求める上で個々の不確定量のデータ個数に注目する必要があることを明らかにし，R^*の具体的な決定法を提示し，シミュレーションによりその妥当性を検討する．

2. 有限個の統計データから求めた特性値のばらつき

確率変数Zのn個の実現値を小さい順に並べかえた$\{z_i\}$ $(i=1\sim n)$において，各z_iに対応する累積確率P_i（=1-超過確率）は，広く用いられている

$$P_i = \mathrm{Prob}[Z \leq z_i] = i/(n+1) \tag{1}$$

で与えるとする．したがって，n個のデータのもとでは累積確率$1/(n+1) \sim n/(n+1)$の間にのみデータは存在することになる．超過確率qがこの範囲にあれば対応する特性値Z^*は内挿により求まる．

i番目の値z_iは本来確率量であり，その分布形$\varphi_n(z_i)$は，Zの確率分布関数F，密度関数fを用いて

$$\varphi_n(z_i) = n!\,F^{i-1}(1-F)^{n-i} f / \{(n-i)!\,(i-1)!\} \quad \text{ただし } F=F(z_i),\ f=f(z_i) \tag{2}$$

となる．Fが与えられれば，(2)式よりz_iの統計量が求められるが，nが大きい場合数値計算が極めて厄介となる．z_iのメジアンまわりの分散σ_i^2の近似式として

$$\sigma_i^2 \doteqdot F(1-F)/(n^2 f) \quad \text{ただし } F = i/(n+1) \tag{3}$$

がある．このσ_i^2は超過確率$1-i/(n+1)$に対応する特性値Z^*のばらつきの大きさを示すと理解してよい．Zが正規確率変数$N(0,1^2)$に従うとして，(3)式ならびにシミュレーションによって求めたσ_iの値を図1に示す．

図1から，データ数nが増えれば特性値Z^*のばらつき（誤差）が減少すること，超過確率が0ないしは1に近づくに従い，特性値のばらつきが大きくなることがわかる．また，(3)式は両端部で過小評価となるが，広い範囲に亘ってよい近似となっている．

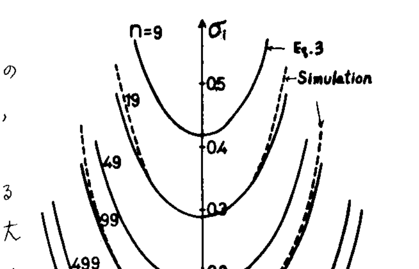

図1　特性値のばらつきσ_i^2

3. 耐荷力特性値に関する確率・統計的考察

鋼構造部材の耐荷力Rは3つの不確定量，材料強度M，製作誤差F，設計式の評価Pの積，R=MFPで表す場合が多い．ここでは問題の簡単化のために製作誤差Fを除外し，耐荷力RはR=PMで表されるとする．P，Mはともに対数正規分布に従うとし，R，P，Mに対数変換を施せば，

$$X = X_1 + X_2 \quad ,\ \text{ただし } X = \ln R,\ X_1 = \ln P,\ X_2 = \ln M \tag{4}$$

と書き改められる．なお，X，X_1，X_2は正規確率変数である．X_1, X_2の超過確率q_1, q_2に対応する特性値X_1^*, X_2^*を用いて

$$X^* = X_1^* + X_2^* \tag{5}$$

と書くと，q_1, q_2が次式を満たせば，X^*は常にXの超過確率qに対応した特性値となっている．

$$\Phi^{-1}(1-q) = \{\Phi^{-1}(1-q_1)\sigma_1 + \Phi^{-1}(1-q_2)\sigma_2\}/\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \quad \text{，ここで}\sigma_1^2, \sigma_2^2\text{は}X_1, X_2\text{の分散．}\Phi\text{は正規分布関数} \tag{6}$$

ここで，X_1，X_2がn_1，n_2個からなる統計データとして与えられている場合を考える．X_1^*，X_2^*は2.で示したように統計データから内挿して求める．X_1^*，X_2^*は確率量であり，X_1^*とX_2^*の和として定義されるX^*の分散σ_*^2はX_1^*，X_2^*の分散σ_{*1}^2，σ_{*2}^2を用いて

$$\sigma_*^2 = \sigma_{*1}^2 + \sigma_{*2}^2 \tag{7}$$

と書けよう．(6)式によるq_1, q_2の関係を用い，$\sigma_{*1}^2, \sigma_{*2}^2$は(3)式で評価し，$\sigma_*$の値を求めた結果を図2,3に示す．これらの図から，1) q_1, q_2の選び方により，特性値X^*のばらつきσ_*は緩やかではあるが変化する．2) X^*のばらつきを最小にするq_1, q_2の最適組合せが存在する．3) データ数の多い変数については超過確率を大きく，少ない変数については小さくとるべきである．以上の事がわかる．

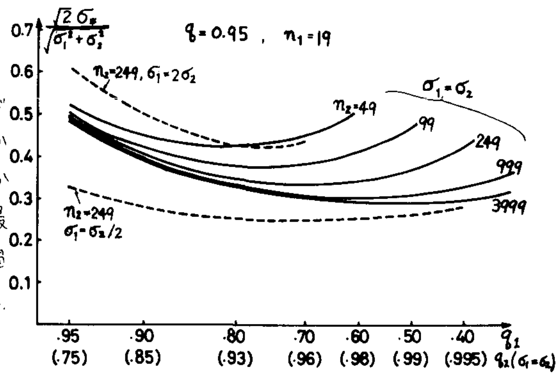

図2 超過確率q_1と特性値X^*のばらつきσ_*^2
（$q=0.95$の場合）

4. 耐荷力特性値の決定法

3.の解析ではq_1, q_2の関係式として(6)式を用いた．実際には(6)式のσ_1，σ_2は未知量である．そこで，(6)式のσ_1^2, σ_2^2をX_1, X_2の標本不偏分散S_1^2，S_2^2でおきかえた

$$\Phi^{-1}(1-q) = \{\Phi^{-1}(1-q_1)S_1 + \Phi^{-1}(1-q_2)S_2\}/\sqrt{S_1^2+S_2^2} \tag{8}$$

を用いて，(7)式のσ_*^2を最小にするq_1, q_2の組合せを求め，X^*を決定する方法が考えられる．

この方法と，q_1を固定し(8)式から求まるq_2のq_1, q_2を用いてX^*を決める方法をシミュレーションにより比較した．実際に求まるX^*の真の超過確率を計算し，整理したのが図4である．提案手法によって決定されるX^*の真の超過確率qの平均$\bar{q}=1-\bar{p}$は目標値に近く，ばらつきσ_qも小さい．q_1を固定した場合，q_1の値によってはかなり大きなばらつきを受けることになる．確かに，q_1を固定しても広い範囲に亘って良好な精度が期待できるが，その範囲がケースバイケースとすれば，本方法の有用性は高いといえよう．この点については広汎な数値計算に基づく検討が必要と考えている．

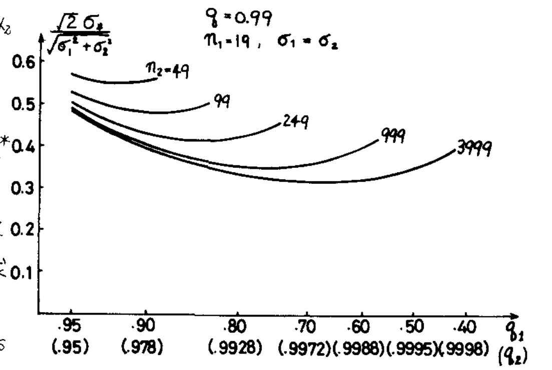

図3 超過確率q_1と特性値X^*のばらつきσ_*^2
（$q=0.99$の場合）

5. あとがき

与えられたデータ個数のもとでの耐荷力特性値の決定法について考察を加えてきた．耐荷力に関与する不確定量の中にはデータ集積に費用のかかるものと，さほどかからないものとがある．したがって，限られた費用の中で耐荷力の統計的特性値を求める場合，各不確定量の最適データ個数が存在するはずである．この問題も本解析での手法を用いれば容易に解くことができる．

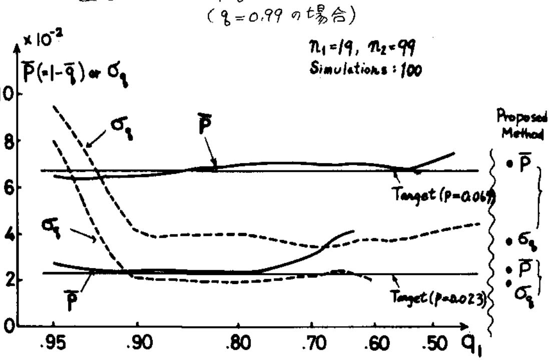

図4 超過確率$q(=1-P)$の平均とばらつき
（シミュレーションによる）

本研究を行うに際して，東京大学 西野文雄教授より示唆，助言をいただきました．

参考文献 Gumbel: Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, 1957，安田,西野,長谷川，第34回年次講演，I-310, 1979.