

鳥取大学工学部 正会員 ○ 白 木 渡
鳥取大学工学部 正会員 高 岡 宣 善

1. よえがき 先に報告した圧縮部材の信頼性設計に関する研究¹⁾においては、部材強度のバラツキだけでなく作用荷重のバラツキをも考慮した圧縮部材の信頼性の評価を行ない、一定の信頼度(あるいは破壊確率)のもとにおける圧縮部材の座屈曲線の作成方法を示した。しかしながら、実際の設計に際しては、圧縮部材の信頼度をいくらにすればよいかという問題が生じてくる。この問題を解決する一つの方法が最適化手法である。本研究では、文献2)で取り扱った圧縮部材、すなわち不規則な初期たわみを有する弾性鋼圧縮部材に時間に関して不規則に変動する荷重が作用する場合の信頼性理論に基づく最小費用設計法について述べ、圧縮部材の信頼度を合理的に定める一つの方法を示す。

2. 圧縮部材の信頼性の評価 図-1に示すような両端ヒンジの圧縮部材に正規定常確率過程である中心軸圧縮力 $N(t)$ が準静的に作用する場合を考える。部材は等方性の弾性材料で作られ、軸圧縮力 $N(t)=0$ のとき、不規則な初期たわみ $y_0(x)=y_{0m}\sin(\pi x/l)$ (y_{0m} :最大初期たわみ; l :部材長)を有しているものとする。任意の時点 t におけるこの場合の最大繰応力は、式(1)で与えられる。式(1)において、 $\sigma_f(t)=N(t)/A$:軸圧縮応力; A :部材の断面積; $y_m=(e_0+y_{0m})/l$
 $=y_1+y_2(l/l)^2$:部材の相対偏心量; e_0 :軸圧縮力の初期偏心量(理想的な中心載荷が現実には存在しないことを考慮して導入した); y_1, y_2 :それぞれ初期偏心, 初期たわみのバラツキを表す無次元量; l :径半長; E :弾性係数; $\lambda=l/r$:細長比; r :回転半径である。本研究では弾性圧縮部材を考えているので、不等式 $\sigma_{\max}(t) > \sigma_y$ (σ_y :降伏点強度)が満足されることをもって部材の破壊と考える。また、式(2)で定義される部材の「強度の余裕」とよばれる新たな確率過程 $Z(t)$ を導入すれば、部材の破壊という事象は、 $Z(t)$ が負超過する事象であるとも考えられる。式(2)の $Z(t)$ を構成するパラメーターのうち、 $\sigma_y, \sigma_f(t), y_1, y_2$ の4つは統計的性格を有し、各パラメーターは正規分布法則に従い互いに統計的に独立であるとする。 y_1 と y_2 の期待値はともにゼロと考える。さて、以上の準備のもとに圧縮部材の破壊確率を求める。ここでは、部材の横断面のいずれの側でも繰応力が降伏点に達するという可能性を考慮する場合を考える。この場合の耐用期間 T における部材の全破壊確率は、確率過程の場合に拡張した線形近似理論を用いれば、比較的簡単に式(3)のようになる²⁾。

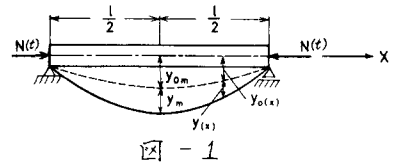


図-1

$$\sigma_{\max}(t) = \sigma_f(t) + y_m \frac{\pi^2 \sigma_f(t) E}{\lambda^2 E - \sigma_f(t) \lambda^2} \quad (1)$$

$$Z(t) = \sigma_y - \sigma_{\max}(t)$$

$$= \sigma_y - \sigma_f(t) - y_m \frac{\pi^2 \sigma_f(t) E}{\lambda^2 E - \sigma_f(t) \lambda^2} \quad (2)$$

$$Q = 1 - \{1 - 2F_z(0)\} \exp[-2\beta_z(0) \cdot T] \quad (3)$$

ここに、 $2\beta_z(0)$ は $Z(t)$ が負超過する確率の時間密度、 $2F_z(0)$ は部材が最初から破壊する確率で、それぞれ式(4)、(5)で与えられる。

$$2\beta_z(0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{-K_{\sigma_f}(0)}{D_{\sigma_y} + D_{\sigma_f} + \left(\frac{\pi^2 \sigma_f E}{\lambda^2 E - \sigma_f \lambda^2}\right)^2 (D_{y_1} + \frac{r^2}{\lambda^2} D_{y_2})}} \exp\left[-\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_f}{2\left\{D_{\sigma_y} + D_{\sigma_f} + \left(\frac{\pi^2 \sigma_f E}{\lambda^2 E - \sigma_f \lambda^2}\right)^2 (D_{y_1} + \frac{r^2}{\lambda^2} D_{y_2})\right\}}\right] \quad (4)$$

$$2F_z(0) = 1 - 2\Phi\left[\sqrt{\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_f}{D_{\sigma_y} + D_{\sigma_f} + \left(\frac{\pi^2 \sigma_f E}{\lambda^2 E - \sigma_f \lambda^2}\right)^2 (D_{y_1} + \frac{r^2}{\lambda^2} D_{y_2})}}\right] \quad (5)$$

式(4)、(5)において、 $D_{\sigma_y}, D_{\sigma_f}, D_{y_1}, D_{y_2}$ はそれぞれ $\sigma_y, \sigma_f(t), y_1, y_2$ の分散、 $\bar{\sigma}_y$ 、 $\bar{\sigma}_f$ は $\sigma_y, \sigma_f(t)$ の期待値、 $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp(-t^2/2) dt$ 、 $K_{\sigma_f}(\tau) = D_{\sigma_f} \exp(-d\tau^2)$ ($d=1 \text{ day}^{-2}$)とする²⁾。

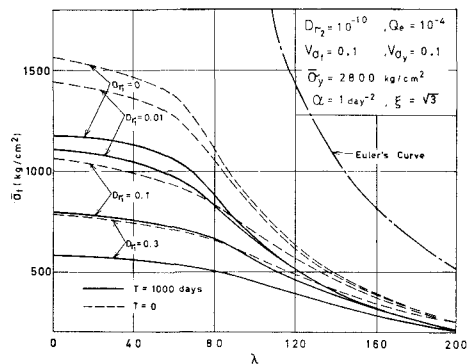


図-2

以上示した式(3)~(5)を用いて破壊確率を計算し、一定の破壊確率 $Q=10^{-4}$ に対する座屈曲線と文献¹⁾で示した手順に従って描いたのが図-2である。ただし、この図は長方形断面の場合($\xi=Y/t_e=\sqrt{3}$)で、各パラメーターの値は図に示す値を用いた。このような図を用いれば、与えられた一定の信頼度($1-Q=99.99\%$)のもとでの圧縮部材の信頼性設計が可能であるが、実際の設計に際しては、信頼度をいくにすれば適当かという問題が生じてくる。この問題を解決する一つの方法が次に述べる最適化手法である。

3. 信頼性理論に基づく圧縮部材の最小費用設計法 圧縮部材の信頼度を合理的に定める一つの方法として、与えられた条件を満しかつ部材の期待費用(初期建設費と破壊によって生ずる損失額の総和の期待値)を最小にするような設計変数を求める信頼性理論に基づく圧縮部材の最小費用設計法について考える。まず、部材の破壊による損失額の経済的評価を行うために、時点 t から $t+dt$ の間に起りうる破壊によって生ずる損失額の期待値 $d\bar{L}$ を求める。ここで考えている条件のもとでは、これは $d\bar{L}=2C_F p(t)$ で計算される^{3),4)}。ここに、 C_F は破壊によって生ずる損失額、 $p(t)$ は式(4)で与えられる破壊確率の時間密度である。この場合、さらに現在価格と耐用期間の末における複利合計金額との差を考慮するために現価係数 $q(t)=e^{-\varepsilon t}$ を導入する⁵⁾。ここに、 $\varepsilon=\ln(1+\gamma)$ (γ :利率)で表わされる year^{-1} の次元を有する係数である。そうすると、耐用期間 T における損失額の期待値 $\bar{L}$ は、式(6)のようになり、圧縮部材の期待費用 E_c は式(7)のようになる。式(7)において、 C_I は初期建設費である。最小費用設計法の目的は、 E_c が最小になるような部材の設計変数(本研究では部材断面積)を決定することである。すなわち、式(8)に示す最適化条件式を満足する部材断面積を決定することである。ここでは、簡単のために初期建設費は $C_I=Au$ (u :単位面積当りの費用)で表わされるものとし、この関係と式(4)、(5)と式(8)に代入すると、この場合の最適化条件式が得られる。それを解けば求める最適断面積が得られる。さらに、式(3)および $\lambda=\ell/(\xi t_e A^{2/3})$ (ξ :断面形状によって異なる定数⁶⁾)なる関係から、それぞれその最適断面積を有する部材の破壊確率および細長比が得られる。

$$\bar{L} = 2C_F \left[F_2(0) - p(0) \left(1 - e^{-\varepsilon T} \right) / \varepsilon \right] \quad (6)$$

$$E_c = C_I + 2C_F \left[F_2(0) - p(0) \left(1 - e^{-\varepsilon T} \right) / \varepsilon \right] \quad (7)$$

$$\frac{dE_c}{dA} = \frac{d}{dA} \left(\frac{C_I}{C_F} \right) + 2 \left[\frac{dF_2(0)}{dA} - \frac{dp(0)}{dA} \cdot \frac{1 - e^{-\varepsilon T}}{\varepsilon} \right] = 0 \quad (8)$$

4. 数値計算例 以上示した諸式を用いて数値計算を行い、軸圧縮力の期待値 $\bar{N}$ 、耐用期間 T の変化に伴って圧縮部材の最適断面積 A がどのように変化するか、さらにその最適断面積を有する部材の破壊確率および細長比がどのような値を取るかを調べた。その一例を表-1に示す。表-1は、 $D_{R1}=0.01, 0.1, \bar{N}=50, 100, 150, 200 \text{ ton}$ 、 $T=0, 1000, 7000 \text{ days}$ と変化させた場合のH形断面を有する部材の弱軸まわりの場合($\xi=2.3$)の最適断面積 A 、細長比 λ および破壊確率 Q の値を示したものである。ただし、 $\bar{\sigma}_y=(\sqrt{D_{R1}}/\bar{\sigma}_y)=0.1$ 、 $\bar{\sigma}_y=2800 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\bar{\sigma}_y=(\sqrt{D_{R1}}/\bar{\sigma}_y)=\sqrt{D_{R1}}/\bar{N}=0.1$ 、 $u/C_F=1.0 \times 10^{-5}/\text{cm}^2$ 、 $D_{R2}=10^{-10}$ 、 $\gamma=0.06$ ($\varepsilon=1.6 \times 10^{-4} \text{ day}^{-2}$)、 $d=1 \text{ day}^{-2}$ 、 $\ell=6 \text{ m}$ とした。また、部材断面はH形断面で弱軸まわりの場合を考えているので、 $\xi=3.3 \text{ m}^{-1}$ 、 $\varepsilon=2$ とした。表-1からわかるように、 D_{R1} 、 $\bar{N}$ 、 T の増加に伴って最適断面積が増加しているのがわかる。また、その最適断面積に対応する部材の破壊確率 Q は、 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ の値をとり、最適断面積 A と同様 D_{R1} 、 $\bar{N}$ 、 T の増加に伴ってその値が増加しているが、細長比 λ は当然逆に減少しているのがわかる。

表-1

N(ton)	D _{R1}	0.01			0.1		
	T (day)	0	1000	7000	0	1000	7000
50	A (cm ²)	82.30	90.31	92.44	85.32	95.39	98.21
	λ	96.06	87.54	85.52	92.65	82.87	80.49
	Q (x10 ⁵)	0.137	0.153	0.240	0.171	0.203	0.324
100	A (cm ²)	110.46	125.31	129.23	121.91	145.32	151.85
	λ	71.57	63.09	61.17	64.84	54.40	52.06
	Q (x10 ⁵)	0.228	0.283	0.459	0.364	0.471	0.765
150	A (cm ²)	135.74	159.77	166.19	160.16	200.39	211.25
	λ	58.24	49.48	47.57	49.36	39.45	37.62
	Q (x10 ⁵)	0.343	0.464	0.766	0.617	0.782	1.26
200	A (cm ²)	161.58	197.02	206.41	200.85	258.16	273.20
	λ	48.92	40.12	38.30	39.36	30.62	28.94
	Q (x10 ⁵)	0.489	0.679	1.12	0.885	1.08	1.73

$$(u/C_F=1.0 \times 10^{-5} \text{ cm}^2, D_{R2}=1.0 \times 10^{-10}, \varepsilon=1.6 \times 10^{-4} \text{ day}^{-2}, \ell=6.0 \text{ m})$$

- 1) 白木・高岡: 圧縮部材の信頼性設計に関する一考察, 土木学会第35回年次学術講演概集, I-328, pp.649-650, 1980-9.
- 2) 高岡・白木: 弾性圧縮部材の確率的設計法, 鳥取大学工学部研究報告, Vol.10, No.1, pp.140-152, 1977-9.
- 3) 白木・相良・高岡: 確率過程論による構造物の最適設計法, 土木学会第32回年次学術講演会, I-20, pp.35-36, 1980-5.
- 4) A.P. Ражинский 著(高岡直善訳): 構造物の信頼性解析, 丸善, pp.251-267, 1970. 5) 長尾義三: 土木部序論(鋼材部論), 共立出版, 1972.