I-321　荷重組合せ係数の確率論的決定法

鳥取大学大学院　学生員　○千阪 貞昭
鳥取大学工学部　正会員　白木 渡
鳥取大学工学部　正会員　高岡 宣善

1．まえがき　構造物に作用する荷重はただ一個とは限らず、通常はいくつかの荷重が複合して作用する。現行の許容応力度設計法では、このような荷重の複合作用（組合せ作用）に対して許容応力度の割増しを行ない、荷重については個々の荷重が別々に作用したとして加算的に処理しているのが普通である。しかし、荷重を加算的に処理するということは極めて非現実的であり、そのような荷重が生起する確率は極めて小さい。そのような理由から、限界状態設計法では荷重の組合せ作用に対して組合せ係数（低減係数）を用いているが、その決定法は明確な理論的根拠を有していない。本研究では、このような点に着目し、過載荷重の概念を用いて確率論的に荷重の組合せ作用を評価し、さらに、そのような評価をもとにして組合せ係数を理論的に決定する方法を示した。

2．過載荷重について　過載荷重とは、通常のレベルを著しく超過し、構造物の安全性をそこなうような荷重であり、不規則な時間区間 $\tilde{\tau}$ ごとに現れ、不規則な作用継続時間 $\tilde{\Delta}$ を有する荷重系列と考えられる（Fig.1参照）。いま、過載荷重の不規則系列が定常であるとすると、与えられた任意の時点における過載荷重の生起確率 a は式(1)のように与えられる。ここに、$\bar{\Delta}$ および $\bar{\tau}$ はそれぞれ過載荷重の作用継続時間および再現期間の期待値である。また、過載荷重が生起するという事象が構造物の破壊事象に等しいと考えることにより、期間Tにおける構造物の破壊確率 ∇ は次のようにして求められる。すなわち、構造物の耐用期間Tを小さな時間区間 θ で分割し、期間Tにおいて少なくとも1回は過載荷重が生起する確率 ∇ を考える。そうすると、∇ は式(2)のように与えられ、さらに、a および ∇ が小さく、$\theta=\bar{\Delta}$ とすれば式(2)は式(3)のようになる。この場合、Tの値としては構造物の耐用期間のうち、過載荷重が生起する確率のある部分のみを意味する。式(3)は過載荷重の継続時間の分布関数を用いて厳密に導かれる[1]。

$$a = \bar{\Delta}/\bar{\tau} \qquad (1)$$

$$\nabla = 1-(1-a)^{T/\theta} \qquad (2)$$

$$\nabla \fallingdotseq \frac{a \cdot T}{\bar{\Delta}} \qquad (3)$$

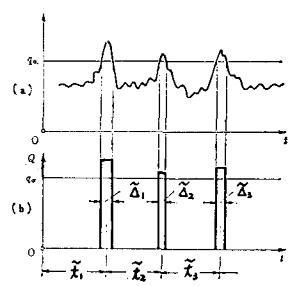

Fig.1

3．過載荷重による組合せ作用の評価　ここでは、互いに独立な2つの過載荷重 q_1, q_2 の組合せ作用を考察する。いま、過載荷重の作用継続時間はごく短く、かつ過載荷重が生起する時間以外においては荷重の値はごく小さく、構造物の設計上何ら考慮する必要はないとする。さて、2つの過載荷重が指定された時点に同時に生起する確率 a_{12} は、個々の過載荷重がこの時点に生起する確率 a_1 および a_2 を用いて式(4)のように表わされる。ここに、$\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ および $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ はそれぞれ過載荷重 q_1, q_2 の作用継続時間および再現期間の期待値である。また、2つの過載荷重の同時作用継続時間 Δ_{12} の期待値 $\bar{\Delta}_{12}$ は、以下のように考察することにより求まる。ここでは、個々の過載荷重 q_1, q_2 の作用継続時間 Δ_1 および Δ_2 を確定量と仮定し、過載荷重 q_1 の作用開始時点を時間原点にとる。また、$\Delta_1 > \Delta_2$ としておく。そうすると、時間区間 $-\Delta_2 < t < \Delta_1$ において2つの過載荷重が重なり合うという可能性があり、過載荷重 q_2 の作用開始時点はこの区間で一様に分布している。この場合、区間 $-\Delta_2 < t < 0$ および $(\Delta_1-\Delta_2) < t < \Delta_2$ においては、過載荷重の同時作用継続時間は0から Δ_2 まで一様に変化するが、区間 $0 < t < (\Delta_1-\Delta_2)$ においては一定値 Δ_2 のままである。この場合の過載荷重の同時作用継続時間 Δ_{12} の確率分布 P_Δ および確率密度 f_Δ は、それぞれFig.2およびFig.3のようになり、同時作用継続時間の期待値 $\bar{\Delta}_{12}$ は式(6)のように求まる。また、構造物の耐用期間Tの間に少

$$a_{12} = a_1 \cdot a_2 = \frac{\bar{\Delta}_1 \cdot \bar{\Delta}_2}{\bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2} \qquad (4)$$

$$\bar{\Delta}_{12} = \frac{2\Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2} \cdot \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\Delta_1-\Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2} \cdot \Delta_2 = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\bar{\Delta}_{12}} = \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\Delta_i} \qquad (6)$$

$$\nabla_{12} = \frac{a_{12} \cdot T}{\bar{\Delta}_{12}} \qquad (7)$$

なくとも1回、2つの過載荷重が重なり合う確率$\mathbb{V}_{12}$は、2.で述べた単一の過載荷重による破壊確率と同様の考察をすることにより、式(7)のように与えられる。上述の結果は、過載荷重の作用継続時間が確定量でない場合にも、作用継続時間の分布関数および過載荷重の開始時点の時間確率密度を用いて求まり、同様の結果が得られる[1]。この場合には、式(7)のΔ_1, Δ_2のかわりに過載荷重q_1, q_2の作用継続時間の期待値$\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$を用いることができる。式(4),(6)および(7)は、多くの過載荷重が作用する場合にも拡張できる。したがって、このような過載荷重の概念を用いることにより、荷重の組合せ作用を過載荷重が重なり合う確率として評価できよう。

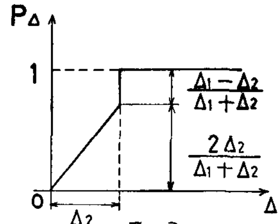

Fig.2

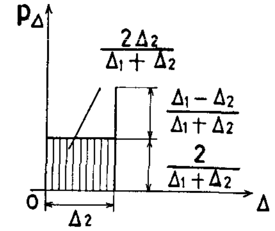

Fig.3

4. 組合せ係数の決定法について　いま、構造物の危険断面における応力が、作用する荷重$q_1, \cdots, q_n$と線形関係にあると仮定する。構造物が破壊しないためにはこの応力は式(8)を満たさねばならない。ここに、rは耐荷能力であり、b_iは構造物のパラメータに依存する係数である。また、組合せ係数n_c $(0<n_c<1)$を単一荷重作用による個々の設計用荷重$[q_i]$を総和した値を低減する係数として考える。そうすると、個々の設計用荷重$[q_i]$およびb_iが既知であるとすれば、n_cを用いて設計用耐荷能力$[r]$は式(9)を満たすように定められる。この場合、n_cは未知である。式(8)を式(9)で除して式(10)が得られる。ここで、p_iは式(11)で与えられる。また、式(10)より$n_c \geqq \max\{p_1, \cdots, p_n\}$の条件が得られる。さて、2つの荷重$q_1, q_2$が作用する場合に、その組合せ係数の決定法を具体的に述べる。ここでは、荷重q_1, q_2の分布形F_1, F_2が既知であるとする。また、耐荷能力は確定量であるとする。そうすると、式(10)の右辺は1となり、したがって、式(12)が得られる。式(12)の左辺が1を超える確率Q_*は、過載荷重の概念を用いて式(13)〜(16)のように与えられる。この場合、荷重q_1, q_2をそれぞれ$n_c[q_1]/p_1$および$n_c[q_2]/p_2$をレベルとする過載荷重と考える。したがって、a_1, a_2は荷重の分布F_1, F_2を用いて、それぞれ式(17),(18)で与えられ、また、過載荷重q_1, q_2の同時生起確率a_{12}は式(19)によって与えられる。上述のように考えることにより、個々の設計用荷重$[q_i]$およびb_iが既知であれば、規定の破壊確率Q_*を満たすように過載荷重のレベルを決定し、n_cを求めることができる。また、個々の設計用荷重$[q_i]$としては、規定の破壊確率を満たす単一荷重作用による過載荷重のレベルを用いることができる。

$$b_1 q_1 + \cdots + b_n q_n \leqq r \tag{8}$$

$$n_c\{b_1[q_1] + \cdots + b_n[q_n]\} = [r] \tag{9}$$

$$\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} + \cdots + \frac{p_n q_n}{n_c[q_n]} \leqq \frac{r}{[r]} \tag{10}$$

$$p_i = p_i[q_i] \big/ (b_1[q_1] + \cdots + b_n[q_n]) \tag{11}$$

$$\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} + \frac{p_2 q_2}{n_c[q_2]} \leqq 1 \tag{12}$$

$$Q_* = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_{12} \tag{13}$$

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{P}\left\{\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} \geqq 1\right\} = \frac{a_1 \cdot T}{\bar{\Delta}_1} \tag{14}$$

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{P}\left\{\frac{p_2 q_2}{n_c[q_2]} \geqq 1\right\} = \frac{a_2 \cdot T}{\bar{\Delta}_2} \tag{15}$$

$$\mathbb{V}_{12} = \mathbb{P}\left\{\frac{p_1 q_1}{n_c[q_1]} + \frac{p_2 q_2}{n_c[q_2]} \geqq 1\right\} = \frac{a_{12} \cdot T}{\bar{\Delta}_{12}} \tag{16}$$

$$a_1 = 1 - F_1\left(\frac{n_c[q_1]}{p_1}\right) \tag{17}$$

$$a_2 = 1 - F_2\left(\frac{n_c[q_2]}{p_2}\right) \tag{18}$$

$$a_{12} = \int_0^{\frac{n_c[q_1]}{p_1}} f_1(q_1) \cdot \left\{1 - F_2\left(\frac{n_c[q_1] - p_1 q_1}{p_2}\right)\right\} dq_1 \tag{19}$$

$$F_1(q_1) = \exp\left(-\exp\frac{931 - q_1}{365}\right) \tag{20}$$

$$F_2(q_2) = 1 - \exp\left(-0.2644\, q_2^{0.5625}\right) \tag{21}$$

〔単位：N/m²〕

5. 数値計算結果および考察　ここでは、雪荷重q_1と風荷重q_2の組合せを考え、規定の破壊確率$Q_* = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$に対して組合せ係数を求めた結果を表-1に示す。雪荷重の年間あたりの分布関数として式(20)のようなグンベル分布を用い、風荷重の分布としては式(21)のようなワイブル分布を用いた。また、過載荷重の作用継続時間はそのレベルに関係なく一定であると仮定し、雪荷重と風荷重のそれをそれぞれ$\bar{\Delta}_1 = 0.1$年$= 36.5$日、$\bar{\Delta}_2 = 1$日、構造物のパラメータに依存する係数を$b_1 = b_2 = 1$、耐用期間を50年とした。個々の設計用荷重$[q_i]$は各Q_*に対する単一荷重作用による過載荷重のレベルを用いた(表-1に併記)。表からあきらかなように、組合せ荷重の値がかなり低減できることがわかる。

表-1　(単位：N/m²)

Q_*	$[q_1]$	$[q_2]$	n_c	$[q_1]+[q_2]$	$n_c\{[q_1]+[q_2]\}$
10^{-1}	3199	897	0.878	4096	3596
10^{-3}	4880	1591	0.814	6471	5267
10^{-5}	6561	2452	0.770	9013	6940

参考文献：1)ルジャニーツィン著、高岡宣善 訳：構造物の信頼性解析、丸善、1980. 2)フェドーロフ：荷重組合せ係数について、CMPC 1980, No-1