I-317　安全性指標 β の安全性の尺度としての有効性について

信州大学工学部　正　員　長　尚
信州大学工学部　正　員　小山　健
信州大学工学部　学生員　庭野　隆

1. まえがき

構造物の安全性の問題を信頼性理論を適用して議論する際，安全性の尺度として安全性指標 β がしばしば用いられる。しかしその定義（計算式）については多くの人によって異なった提案がなされている。そのために同じ問題であっても，それぞれの定義によって違った結果を得ることになる。このことは同じ安全性指標 β という表現であっても，用いた定義によって，その安全性の尺度としての意味が異なることを示している。したがって構造物の安全性の問題を，この安全性指標 β を用いて評価するとき，それぞれの定義の持つ意味を十分理解しておくことは重要である。本文は，任意な確率分布に従う確率変数の関数で表現される問題に対する，安全性指標 β を求める方法の説明と関連させて，主な定義と正確な破壊確率との関係について述べ，若干の考察を加える。

2. 安全性指標 β

安全性の尺度としての安全性指標 β が用いられるようになったきっかけは，Cornell[1] の二次モーメント法の提案である。これは，安全性に影響を与える確率変数の統計的データの不足，ならびに計算の便宜を考えて，確率変数もしくは破壊基準関数の分布の形に関係のない，平均値と分散のみを用いて，「破壊基準関数の変動係数の逆数が β である」と定義した（以下これを β_C と書く）。その後この β_C は，数学的には同じ意味をもつ破壊基準関数でも，その式の表現（定義）のし方によって結果が異なってくるという，式の定義に関する不変性がないという欠点が指摘された。そこでこの不変性を有する安全性指標 β が，Hasofer と Lind[2] によって定義された。すなわち，「個々の確率変数を正規化変換して表現された，破壊基準関数曲面への原点からの距離が β である」とした（以下これを β_{HL} と書く）。ところでこれらの安全性指標 β の，正確な破壊確率 P_f との関係は前に指摘[3]したように次のようである。まず β_C は，個々の確率変数が正規分布で破壊基準関数が1次式の場合か，確率変数が対数正規分布で破壊基準関数が特殊な形をした場合には，$P_f = \Phi(-\beta_C)$ -----(1) により正確な破壊確率との対応がつく。ここに，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数である。次に β_{HL} は，個々の確率変数が正規分布もしくは対数正規分布であれば，破壊基準関数が非線形であっても，$P_f \doteqdot \Phi(-\beta_{HL})$ -----(2) により，かなり正確な破壊確率と対応がつく。さて前述したように，二次モーメント法は意識的に確率分布の形の影響を避けて提案されているが，一方ではそのようにして定義された β の有効性を吟味したり，又確率分布の推定できるものはそれを取り入れたいということから，確率分布の形の影響を考慮した β の提案が幾つかなされている[4),5),6)]。これらに共通しているのは，β_{HL} の方法を拡張して，個々の確率変数が正規分布もしくは対数正規分布である場合に限らず，$\Phi(z_i) = F_i(x_i)$ ----(3)　の関係から，$x_i = F_i^{-1}\{\Phi(z_i)\}$ ----(4)　の関係を，破壊基準関数 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ ----(5)　に入れて，$g(\boldsymbol{z}) = 0$ ---(6)　のように正規化変換すれば，β_{HL} と同じやり方で，破壊基準関数が非線形の場合であっても，かなり正確な破壊確率と対応がついた β が求められるという考え方である。ここに x_i は任意の確率分布関数 $F_i(\cdot)$ に従う確率変数，z_i は標準正規変数である。具体的な計算方法は提案者によって異なるが，これらの提案に基づいて計算されると同じ結果が得られることは云うまでもない（以下これを β_M と書く）。この考え方によった比較的簡単な計算手順について以下記す。

3. 任意な確率分布に従う確率変数の関数で表わされる破壊基準関数に関する安全性指標 β の一計算法

式（6）への原点（$\boldsymbol{z} = 0$）からの距離である $\beta_M = \|\boldsymbol{z}\|$ ---(7)　を求めるには，周知の次の繰り返し式を利用する。$\boldsymbol{z}^{k+1} = \nabla g(\boldsymbol{z}^k)[\{\boldsymbol{z}^k \nabla g(\boldsymbol{z}^k) - g(\boldsymbol{z}^k)\}\{\nabla g(\boldsymbol{z}^k)^T \nabla g(\boldsymbol{z}^k)\}^{-1}]$ ---(8)　この式

を直接式(6)に適用するためには，式(4)の関係を式(5)に代入して，Zに関して陽な形で式(6)を表現しなければならない。それが可能なのはごく限られた確率分布の場合だけで一般性がないから，ここでは式(6)のように変換しない，式(5)のまゝを利用することについて考える。そのためには式(8)中の $g(Z^k)$ および $\nabla g(Z^k)$ は次のようにして計算する。まず $g(Z^k)$ は，式(4)より X^k を求め，これを用いて $g(Z^k)=g(X^k)$ ----(9) により計算する。次に $\nabla g(Z^k)$ は次式を利用して計算する。$\partial g/\partial z_i^k=(\partial g/\partial x_i^k)(\varphi(z_i^k)/f_i(x_i^k))$ ---- (10) ここに，$\varphi(\cdot)$は標準正規確率密度関数，$f_i(\cdot)$は確率変数 x_i の確率密度関数である。この式(10)は次のように証明できる。$\partial\Phi/\partial z_i=\varphi(z_i)=(\partial F_i/\partial x_i)(\partial x_i/\partial z_i)=f_i(x_i)(\partial x_i/\partial z_i)$ -----(11) の関係より，$\partial x_i/\partial z_i=\varphi(z_i)/f_i(x_i)$ -----(12) を得る。一方 $\partial g/\partial z_i=(\partial g/\partial x_i)(\partial x_i/\partial z_i)$ ----- (13) であるから，この式に式(12)を代入すると式(10)の関係を得る。この方法によると，式(3)の関係が既知，つまり確率変数 x_i の確率密度関数 $f_i(x_i)$ が数値的に判っていれば β_M の計算が可能となる。したがって確率分布の形がどんな場合でも，たとえ $f_i(x_i)$ が関数式でなくて，生の統計データのように数値だけで与えられているような場合とか，特定な確率分布がすそ切りされているような場合でも β_M の計算は容易に可能である。そのため統計データを無理に既知の確率分布にあてはめる必要は必ずしもないことになる（別に発表する報告[7]を参照）。計算例を示す。破壊基準関数は，$g(X)=x_1x_2x_3-x_4x_5$ -----(14) とし，X の確率分布は右表に示す。この例では3回の繰り返し計算で収束し，$\beta=2.72$ を得た。なお $\beta_C=3.23$，$\beta_{HL}=3.15$（正規分布），2.89（対数正規分布）であった。

表

X	確率分布	平均値	変動係数	下限値	上限値
x_1	ワイブル	3.75	0.08	2.25	$+\infty$
x_2	対数正規	2.0	0.05	0	$+\infty$
x_3	正　規	1.0	0.05	$-\infty$	$+\infty$
x_4	極値I型	3.75	0.2	$-\infty$	$+\infty$
x_5	ベータ	1.0	0.1	0.5	1.5

4. 考　察

以上述べてきたように，二次モーメント法として生れた安全性指標βは，β_C から β_{HL}を経て β_Mに至って，二次モーメントの範ちゅうから出て，確率分布の形の影響が，十分反映された安全性指標となった。しかも確率分布の形が数値的にでも推定可能ならば，どんな場合でも比較的容易にそれを求めることが可能となった。したがって今後は，確率分布の形がある程度推定できる場合は，できるだけ β_Mで議論することが望ましいように思われる。勿論確率分布の形の推定は現状では困難な場合が多いので，β_C もしくは β_{HL}を安全性の相対的な尺度として用いざる得ないことも多いであろう。しかしそのような場合でも，たとえば別に発表する報告[7]のように，確率分布の形の違いによって結果がどのような影響を受けるか，β_Mの面からの検討を行なって，安全性の尺度としての有効性について吟味を加えることが望ましいように思う。なおここでは特に前もって断らなかったが，破壊基準関数は1つで，各確率変数間には相関はないものとしている。したがって破壊基準関数が複数個存在したり，各変数間に相関がある場合には若干別な議論が必要となる。この点に関しては別な機会に報告する。又最近 Veneziano が確率分布の形の影響を考慮して，ここで述べた尺度と違った，破壊確率の上限値に対応するγを安全性の尺度とすることを提案[8]している。しかし計算の簡便さと，正確な破壊確率と対応の良い，β_Mの方がより実際的であるように思われる。

参考文献　1) Cornell, C. A. : *Structural Safety Specifications Based on Second Moment Reliability Analysis*, 1969.　2) Hasofer, A. M. and Lind, N. C. : *Exact and Invariant Second-Moment Code Format*, 1974.　3) 長尚他：安全性指標βに関する若干の考察，1979.
4) Rackwitz, R : *Practical Probabilistic Approach to Design*, 1976.　5) Lind, N. C. : Formulation of Probabilistic Design, 1977.　6) Rackwitz, R : First order Reliability Methods, 1980.
7) 長尚他：確率変数の分布形の違いが安全性指標βに及ぼす影響について，1981.　8) Veneziano, D : New Index Reliability, 1979.