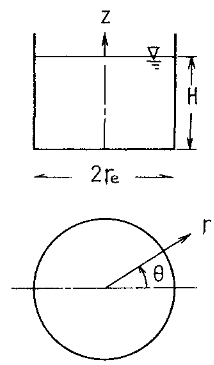
I－308　スロッシング現象に対する等価振動系

九州大学　工学部　学生員　○宮園　穣二
九州工業大学　　正　員　高西　照彦
九州大学　工学部　〃　　園田　敏矢

1、まえがき

近年、大型ＬＮＧタンク，貯油タンク，貯水槽などが築造され，その耐震性の検討が重要な問題となっている。これらのタンクの地震時における挙動の特徴は、タンク自身の質量に基づく振動よりも，それらが内部に保有する液体のスロッシングおよび液体とタンクとの連成による振動現象がタンクの動的挙動を大きく支配することである。従来、タンク内液体のスロッシングについては、多くの研究成果が発表されているが，液体とタンクとの連成振動に対しては、十分な研究がなされていない。 本研究ではこの点を考慮し、液体の振動をばね－質量の１自由度系に置換し，液体系と構造物系の相互作用をばね－質量系の相互作用に変換して、両系の地震応答を求める簡単な方法を示したものである。

2．円形タンク内液体の動揺振動性状



図－1

図－１に示す r，θ，z の円筒座標を有する円形タンクを考える。いま、液体の圧縮性を無視した時の円形タンク内液体の動水圧 σ に関する振動方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

次に、タンク内液体の自由振動を考えると，境界条件は次式で示される。

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi}=0,\ \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)_{z=0}=0,\ \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}\right)_{z=H}=0 \qquad (2)$$

動水圧 $\sigma=R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot Z(z)\cdot i e^{i\omega t}$とおき，(1)式に代入して変数分離を行ない，(2)式に示した境界条件を用いて解くと，σ は次式となる。

$$\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}E_{ns}J_n(\lambda_{ns}r)\cos n\theta\cdot\cosh\lambda_{ns}z\cdot i e^{i\omega_{ns}t} \qquad (3)$$

但し、E_{ns}；係数，　$J_n(\lambda_{ns}r)$；n 次の第１種Bessel関数

λ_{ns}：$\left\{\frac{d}{dr}J_n(\lambda r)\right\}_{r=r_e}=0$を満たすλの値．　$\omega_{ns}=\sqrt{g\lambda_{ns}r_e\tanh(\lambda_{ns}r_e\cdot H/r_e)/r_e}$　　(4)

一方，r，θ，z 方向の液体の変位 $u_{ns}(r,\theta,z,t)$，$v_{ns}(r,\theta,z,t)$，$w_{ns}(r,\theta,z,t)$ は次式で求められる。

$$u_{ns}(r,\theta,z,t)=-\frac{g}{W_0}\iint\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)dt\,dt,\quad v_{ns}(r,\theta,z,t)=-\frac{g}{W_0 r}\iint\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)dt\,dt,\quad w_{ns}(r,\theta,z,t)=-\frac{g}{W_0}\iint\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)dt\,dt \qquad (5)$$

但し、W_0：液体の単位体積重量，　g：重力加速度

(5)式に(3)式を代入し，$r=r_e$，$z=H$における波高 $w_{ns}(r_e,0,H,t)_{max}$の値を１とする変形を基準として，r，θ，z 方向の振動モード $\overline{U}_{ns}(r,\theta,z)$，$\overline{V}_{ns}(r,\theta,z)$，$\overline{W}_{ns}(r,\theta,z)$ を求めると次式となる。

$$\overline{U}_{ns}(r,\theta,z)=U_{ns}(r)\cos n\theta\cdot Z_{ns}(z),\quad \overline{V}_{ns}(r,\theta,z)=V_{ns}(r)\sin n\theta\cdot Z_{ns}(z),\quad \overline{W}_{ns}(r,\theta,z)=W_{ns}(r)\cos n\theta\cdot\overline{Z}_{ns}(z) \qquad (6)$$

但し，
$$\left.\begin{aligned}&U_{ns}(r)=\{J_{n-1}(\lambda_{ns}r)-J_{n+1}(\lambda_{ns}r)\}/\{2J_n(\lambda_{ns}r_e)\},\quad V_{ns}(r)=-J_n(\lambda_{ns}r)/\{\lambda_{ns}rJ_n(\lambda_{ns}r_e)\}\\&W_{ns}(r)=J_n(\lambda_{ns}r)/J_n(\lambda_{ns}r_e),\quad Z_{ns}(z)=\cosh\lambda_{ns}z/\sinh\lambda_{ns}H,\quad \overline{Z}_{ns}(z)=\sinh\lambda_{ns}z/\sinh\lambda_{ns}H\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

単位波高に対する動水圧 σ_{ns}は(6)，(7)式と(4)式より次式で表わされる。

$$\sigma_{ns}=\int\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)dz=\int-\frac{W_0}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dz=W_0\frac{J_1(\lambda_{ns}r)}{J_1(\lambda_{ns}r_e)}\cos n\theta\cdot\frac{\cosh\lambda_{ns}z}{\cosh\lambda_{ns}H}\cdot\sin\omega_{ns}t \qquad (8)$$

全壁面に働く動水圧の合力 P は (8)式を用いて次式となる。

$$P_{ns}=\int_0^{2\pi}\int_0^{H}(\sigma_{ns})_{r=r_e}\cos n\theta\cdot r_e\,dz\,d\theta=\frac{n\pi W_0 r_e^2}{\lambda_{ns}r_e}\cdot\tanh\lambda_{ns}H\cdot\sin\omega_{ns}t$$

$$P_{max.ns}=W_0 r_e^2 C_{p.ns}\qquad C_{p.ns}=n\pi\tanh\lambda_{ns}H/\lambda_{ns}r_e\qquad(9)$$

s	1	2	3	4	5
$\lambda_{1s}r_e$	1.84	5.33	8.54	11.71	14.86

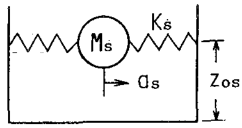
表－1 $\lambda_{1s}r_e$ の値

(4)式において，$n=1$の場合の$\lambda_{1s}r_e$の値を表－1に示す。地震の場合には$s=1$が最も重要となり，この時$\lambda_{11}r_e=1.84$となるから，$C_{p,11}=1.707\tanh(1.84H/r_e)$である。

3．円形タンク内液体の動揺振動の等価振動系

タンク内液体の動揺振動を図－2に示すような、等価質量(M_s)，等価ばね定数(K_s)，等価振幅(a_s)，等価ばねの取付高さ(Z_{os})をもつ等価振動系に置換する。系の運動エネルギーの最大値T_{max}は(6)式より

$$T_{max}=\frac{W_0\omega_{ns}^2}{2g}\int_0^{r_e}\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\{\dot{U}_{ns}^2(r,\theta,z)+\dot{V}_{ns}^2(r,\theta,z)+\dot{W}_{ns}^2(r,\theta,z)\}_{max}\,dr\cdot r\,d\theta\,dz\quad(10)$$



図－2

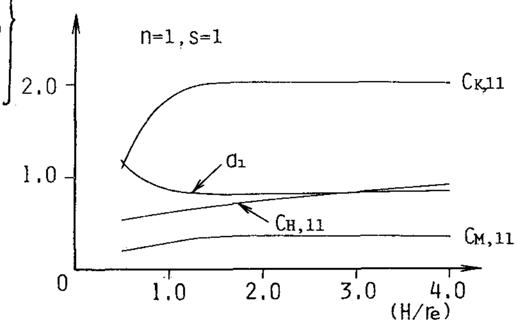
(10)式において$n=1$，$s=1$の場合を考え，(4)式を用いて整理すると

$$T_{max,11}=\frac{W_0\pi r_e^2\{\sinh 2\lambda_{11}H(A+B+C)+2\lambda_{11}H(A+B-C)\}}{8\sinh\lambda_{11}H\cdot\cosh\lambda_{11}H}=W_0 r_e^2 C_{T,11}\qquad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{但し，}\ C_{T,11}=\frac{\pi\{\sinh 2\lambda_{11}H\cdot(A+B+C)+2\lambda_{11}H(A+B-C)\}}{8\sinh\lambda_{11}H\cdot\cosh\lambda_{11}H}\\&\int_0^{r_e}U_{11}^2(r)r\,dr=Ar_e^2,\quad\int_0^{r_e}V_{11}^2(r)r\,dr=Br_e^2\\&\int_0^{r_e}W_{11}^2(r)r\,dr=Cr_e^2,\quad(A,\ B,\ C\ \text{は定数})\end{aligned}\right\}\ (12)$$

ここで，$s=1$の場合の等価質量(M_1)，等価ばね定数(K_1)，等価振幅(a_1)，等価ばね取付高さ(Z_{o1})を求めてみる。

$$\left.\begin{aligned}&K_1=\frac{P_{max.11}}{2T_{max,11}}=W_0 r_e^2 C_{K,11},\quad M_1=\frac{K_1}{\omega_{11}^2}=\frac{\pi W_0 r_e^2 H}{g}C_{M,11}\\&a_1=\frac{P_{max,11}}{K_1}=\frac{C_{P,11}}{C_{K,11}},\qquad Z_{o1}=C_{H,11}\cdot H\end{aligned}\right\}(13)$$



図－3

但し，$C_{K,11}=C_{P,11}^2/2C_{T,11}$，$C_{M,11}=C_{K,11}/(\pi\lambda_{11}H\cdot\tanh\lambda_{11}H)$

$C_{H,11}=H\cdot\lambda_{11}r_e\{\lambda_{11}H\cdot\sinh\lambda_{11}H+1-\cosh\lambda_{11}H\}/\{r_e\sinh(\lambda_{11}H)(\lambda_{11}H)^2\}$

(14)式に示した値を(H/r_e)の関数として示したのが図－3である。図－3を見ると、$H/r_e<1.5$の範囲で、各係数が変化していることが判る。結局、タンクの高さHと半径r_eが与えられれば、図－3より等価質量，等価ばね定数，等価振幅，等価ばねの取付高さが簡単に求められ、タンク内液体の振動をばね－質量の等価振動系に置換することができる。

4．スロッシングの地震応答解析

地震加速度$\ddot{\phi}(t)$がタンクに作用した時，タンクの液体の振動方程式は次式となる。

$$M_1\ddot{y}+C_1\dot{y}+K_1y=-M_1\ddot{\phi}\qquad\ddot{y}+2h_1\omega_{11}\dot{y}+\omega_{11}^2y=-\ddot{\phi}\qquad(14)$$

(14)式に示す1質点系の応答変位yは応答スペクトル法や直接応答計算によって求められ，この時の表面波高$w_{11}(r,\theta,z)$，壁面動水圧合力P_{11}は次式で得られる。

$$w_{11}(r,\theta,z)=yW_{11}(r)\cos\theta\cdot Z_{11}(z)/a_1,\qquad w_{11}(r_e,0,H)=y/a,\qquad P_{11}=K_1y\qquad(15)$$

5．タンクと液体との相互作用

地震時におけるタンクの振動は水の振動とタンク自身の構造物の振動の連成振動である。したがって，本研究に示したように、水の振動を等価振動系に置換したことにより，タンクと水の連成振動を考える場合に便利となるであろう。この計算例については講演時に述べる。