

京都大学工学部 正員 丹羽 義次
 京都大学工学部 正員 北原 道弘
 京都大学大学院 学生員 〇山崎 幹夫

1. はじめに

本研究は、積分方程式法により、半無限地盤上に、非均質な突起物（ゴムとかピア）がある場合のSH波による共振現象の解析を行なうものである。従来、積分方程式法は、均質物質には適用が容易であったが、非均質物質（弾性係数が物質内で漸次変化）には適用が困難であった。本研究においては、積分方程式の利点を生かしつつ、有限要素法的手法をとり入れて、非均質物質への適用を試みるものである。一般に土木構造物には、一つの系内（特にマス構造）で、その構造が弾性体と仮定できる場合であっても、物質的に均質であると仮定することが困難な場合が多く、均質物質しか扱えない場合には、かなり適用範囲が狭められると考えられる。本研究では、この点について改良を加え、非均質物質への適用を試みるものである。またもう一つの特徴は、一般に無限又は半無限体上の弾性構造物の動的問題を積分方程式で解析する場合には、いわゆる積分核にHankel関数が表われてくる。このHankel関数の引数には、波数と距離との積の項が入るため、波数が変化する場合の解析においては、そのたびごとに積分核を計算しなくてはならない。しかし本研究の方法によると波数が変化しても積分核の積分を再計算する必要がなく、波数を変化させず共振曲線を描くには特に適している。

2. 基礎式と境界条件

SH波が入射した場合の面外定常動弾性問題を考える。この問題の基礎式は、物体力が作用しない場合には、

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho \omega^2 u = 0 \quad (1)$$

ここに、 u ；面外変位、 μ ；せん断剛性（突起物内で変化）、 ρ ；密度（一定）、 ω ；角振動数である。

境界条件としては（Fig. 1参照）、半無限地盤（ D_+ ）

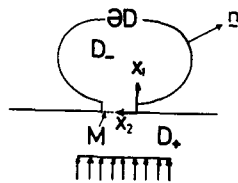


Fig. 1 Domain and Boundary

および突起物（ D_- ）の境界（接合部Mは除く）は、自由（面外応力が零）境界を考える。

$$t = \mu \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

さらに、地盤の無限遠で散乱波 u_s は、次の放射条件を満足するものとする。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\partial u_s / \partial r - i k u_s] = O(r^{-1}) \quad (3)$$

3. 積分方程式の構成

3.1 半無限地盤（ D_+ ）内における積分表示

半無限地盤（ $\mu = \mu_0$ ；（一定））において、基本解の定義および基本解を示すと次のようになる。

$$\mu_0 (\Delta + k_0^2) \mathbb{U}(X, Y) = -\delta(X, Y), \quad X, Y \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{U}(X, Y) = \frac{1}{4\pi\mu_0} H_0^{(2)}(k_0 r) \quad (4)$$

ここに、 $k_0 = \omega / C_0$ 、 $C_0 = \sqrt{\mu_0 / \rho}$ 、 k_0 、 C_0 は、半無限地盤内における横波の波数および波速（一定）である。

地盤内の散乱波による変位 u_s に対しては、外部表現により次の表示を得る。

$$u_s(x) = -2 \int_M \mathbb{U}(x, y) \mu_0 \frac{\partial u_s(y)}{\partial n_y} dy, \quad x \in M$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (u_s(x) + u_r(x)) = 0, \quad x \in M \quad (5)$$

ここに、 $u_s(x)$ 、 $u_r(x)$ は、入射波および反射波の変位である。故に、地盤内の変位場 u は、次のように表示できる。

$$u(x) = u_s(x) + u_r(x) - 2 \int_M \mathbb{U}(x, y) t(y) dy \quad (6)$$

3.2 非均質突起物（ D_- ）内における積分表示

非均質突起物における変位の積分表示は、この突起物内で境界条件を満足するGreen関数、 $G(x, y)$ が求まるとすると、このGreen関数を用いて次のように表示できる。

$$u(x) = \int_{\partial D_-} G(x, y) t(y) dy \quad (7)$$

ここで、このGreen関数を構成するために次のように考える。(1)式を変形し、ラプラス方程式の部分にグリーン関数の公式を適用し、ラプラス方程式の基本解 $\mathbb{L}(X, Y)$ を用いて積分表示を構成すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon(x) \mu(x) u(x) = & \iint_{D_-} [\mathbb{L}(X, Y) \cdot \nabla_Y \mu(Y)] u(Y) dA_Y + \rho \omega^2 \iint_{D_-} \mathbb{L}(X, Y) u(Y) dA_Y \\ & + \int_M \mathbb{L}(X, y) [\mu(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}] dy - \int_{\partial D_-} [\frac{\partial}{\partial n} \mathbb{L}(X, y)] [\mu(y) u(y)] dy \end{aligned} \quad (8)$$

いまこの(8)式が変位 u について解けたとすると、(7)式と一致し、突起物内部の変位の表示が得られたことになる。

る。

3.3 積分方程式の構成と解表現

突起物と地盤との接合面 (M) において、半無限地盤と非均質突起物における変位 u と、応力 σ とは、一致しなくてはならない。すなわち (6) 式と (7) 式とが一致するという条件を課すことにより、積分方程式が次のように構成される。

$$u_i(x) + u_r(x) - 2 \int_M U(x, y) \sigma(y) dy = \int_M G(x, y) \sigma(y) dy \quad (9)$$

この式において、 u_i , u_r は入射波および反射波であるから、既知であり、 $G(x, y)$ も (8) 式を離散化することにより、数値的に構成できるから、未知量である応力 $\sigma(y)$ が接合面で求まることになる。故に $\sigma(y)$ が求まれば、変位 u は、突起物内部において (7) 式、半無限地盤内において (6) 式により求まることになる。

4. 数値解析例

ここでは一例として、突起物と半無限地盤との間に亀裂を有し、突起物の剛性が Fig. 2 のように変化する場合の解析結果を示す。Fig. 2 において、空白の部分が地盤との接合部を表わしている。Fig. 3 は、Fig. 2 に [X] 印で示した点における共振曲線を示している。この図において、横軸の AK は、突起物の高さ a (本研究では 1.0) と波数 k との積を示す無次元量である。縦軸は、接合部における入射波と反射波の振幅の和に対する [X] 印の点における変位の応答倍率である。Fig. 4 ~ Fig. 6 は、共振点での共振 mode の絶対値を示している。また入射波は、鉛直下方の地盤 (mode 図の下側の空白の部分) から入射している。

この mode 図において、low, high は、その共振 mode の変位の倍率の最小値と最大値を示している。また、色帯の薄いものが小さい値を示し、色帯が濃くなるにしたがって大きい値を示している。本研究の手法と積分核として Hankel 関数を用いた積分方程式法との比較に付いては、前者が分割数 45 で、後者が分割数 28 のとき波数を 5 個流すのに、前者は 1440 [MS] で、後者は 10791 [MS] となる。前者と後者との相対誤差は 2.5 % であるからいかに前者の手法が有益であるかが理解されよう。(計算機は京都大学大型計算機センター FACOM M-200 を使用した。)

5. おわりに

本手法の共振問題への適用の有用性が確認されたが、中心部にコアを有するダム形状の突起物の共振問題および半無限地盤への影響などの解析が完了しており、これらについては当日報告する。

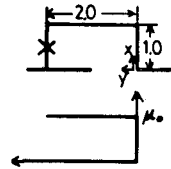


Fig. 2 Variance of shear modulus

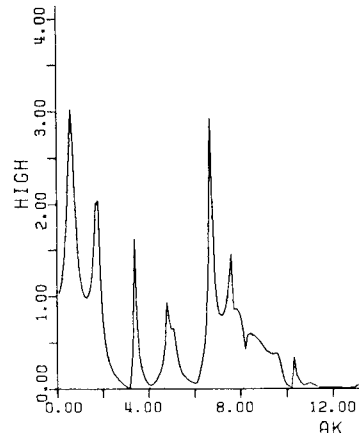


Fig. 3 Resonance Curve

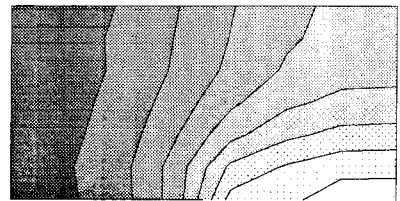


Fig. 4 1st mode $AK=0.62$ low=1.46 high=3.05

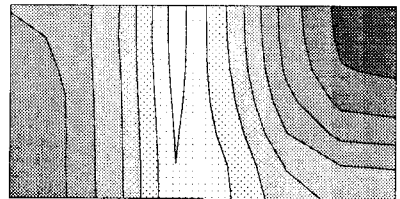


Fig. 5 2nd mode $AK=1.76$ low=0.19 high=2.96

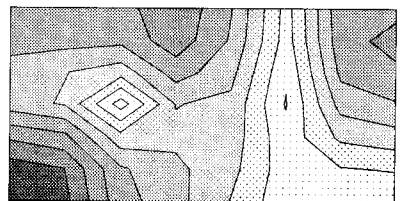


Fig. 6 3rd mode $AK=3.36$ low=0.91 high=4.27