

京都大学工学部 正 員 丹羽 義次

京都大学工学部 正 員 北原 道弘

京都大学大学院 学生員 ○山本 正昭

1. はじめに

本研究は、等方均質かつ線形な半無限弾性体中に空洞群が存在し、そこに平面波が入射したときの空洞群周辺の変形状態を解明することを目的とし、定常弾性波動問題における積分方程式を構成し、積分方程式法により動的応答解析を試みたものである。さらに空洞群が存在することによって引き起こされる空洞群周辺における局所的な共振現象についての考察も試みた。

2. 基礎式

均質な線形弾性体の定常場は、次の *Navier-Cauchy* の式に支配される。

$$\mathcal{L}_{ij} u_j \equiv G^2_{ij} u_{kjj} + (G^2_{ii} - G^2_{ij}) u_{kji} + \omega^2 u_i = -f_i$$

u_i は変位成分、 f_i は単位質量当りの物体力、 λ, μ は Lamé の定数、 $G_T = \sqrt{\mu/\rho}$, $G_L = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ は横波と縦波の波速である。また応力の作用素を $\hat{T}_{ij} \equiv \lambda n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ と定義すると応力ベクトルの成分 $t_i = \hat{T}_{ij} n_j$ と書ける。ここで n は考えている領域に対する外向き単位法線ベクトルである。

3. 基本解と積分方程式

基本解 $\hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega)$ は Y 点に作用する x_i 方向の単位の集中力によって X 点に生ずる x_i 方向の変位という意味をとり、これは次式を満足する $\mathcal{L}_{ij} \hat{U}^{\pm}_j(x, y; \omega) = -\delta(x-Y) \delta^{\pm}_i$, $\delta^{\pm}_i$ はクロネッカーのデルタ、 $\delta(x-Y)$ はディラックのデルタ関数である。いま $T^{\pm}_i(x, y; \omega) = \hat{T}_{ij} \hat{U}^{\pm}_j(x, y; \omega)$ と定義すると、相反作用の定理により次の *Somigliana* の式が得られる。

$$\iint_{D_+} \hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega) f_i(Y) dV_Y + \iint_{\partial D} \{ \hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega) t_i(Y) - U_i(Y) T^{\pm}_i(x, y; \omega) \} dS_Y = F(x) U^{\pm}_i(x)$$

$F(x)$ は $F(x) = 0$ ($x \in D_+$), $F(x) = 1/2$ ($x = x \in \partial D$), $F(x) = 1$ ($x \in D_-$), と定義する。(ただし、 D_+ を内部領域, D_- を外部領域, ∂D を境界とし, $x, y \in \partial D$, $X, Y \in D \cup D_+$ とする。) 基本解 $\hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega)$ は 2 次元問題の場合は次の様に得られる。 $\hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega) = \frac{1}{4\mu} \{ H^{\pm}_0(k_T r) \delta^{\pm}_i + \frac{1}{k_L} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \{ H^{\pm}_0(k_L r) - H^{\pm}_0(k_T r) \} \}$ ここで、 $r = |x - y|$, k_T, k_L は横波と縦波の波数で $k_T = \omega/G_T$, $k_L = \omega/G_L$ である。(いま外部定常波動問題をこの基本解と *Somigliana* の公式を用いて考える。(ただし、 $f_i(x) = 0$ とする) 入射波による変位を $U^{\pm}_i(x)$, 入射波が境界に達することにより発生する波による変位を $U^{\pm}_i(x)$, さらに全体の変位を $U^{\pm}_i(x)$ とすると、 $U^{\pm}_i(x) = U^{\pm}_i(x) + U^{\pm}_i(x)$ となる。いま全体の変位 $U^{\pm}_i(x)$ に対し、外部場の境界積分方程式を構成すると、次の様になる。

$$\frac{1}{2} U^{\pm}_i(x) = U^{\pm}_i(x) + \iint_{\partial D} \{ \hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega) t_i(Y) - U_i(Y) T^{\pm}_i(x, y; \omega) \} dS_Y \quad x, y \in \partial D.$$

また外部場は次式により表示される

$$U^{\pm}_i(x) = U^{\pm}_i(x) + \iint_{\partial D} \{ \hat{U}^{\pm}_i(x, y; \omega) t_i(Y) - U_i(Y) T^{\pm}_i(x, y; \omega) \} dS_Y \quad x \in D_+.$$

4. 数値解析例

解析の妥当性を確認するため無限弾性体中に空洞が 1 つある場合について解析を行ない、得た結果と C.C.Mow 等¹⁾ によつて求められた結果とを比較したものが Fig. 1, Fig. 2 である。実線は本手法により得られた値で、丸と三角は C.C.Mow 等によつて得られた値である。 aK_T は空洞の半径で無次元化した横波の波数、矢印は入射 SV 波の入射方向を示す。両者の結果はよく一致していることがわかる。次に半無限弾性体中に空洞が 1 つある場合について、平面 P 波と SV 波を下方から半無限境界に対し垂直に入射させた場合の変位の状態を示したものが Fig. 3 と Fig. 4 である。円と水平の破線は変形前の空洞と半無限境界を示す。矢印は各点での変位ベクトルを示している。左端の破線から SV 波では矢印が、P 波では実線が出ているが、これは入射波による変位を表わしている。ただし、P 波の場合は実線が破線の右側に出ているとき上向きの変位、左側に出ているときは下向きの変位を表

わしている。P波が入射した場合は、モデルの対称性とP波の性質より変位場の状態は対称になっている。SV波が入射した場合は、モデルの対称性とSV波の性質により変位場の状態は反対称になっている。これらの図からわかるように、変位場に回転現象が生じており、空洞周辺の変位場はかなり複雑なものとなっている。Fig.3とFig.4に示された結果からもわかるように、空洞群が半無限境界付近に存在する場合には、半無限境界と空洞群の存在による波の散乱のため、空洞群周辺に局所的な共振現象が生じる可能性があると考えられる。Fig.5は、本手法を用いた固有値解析（現問題に対しては正しい意味での固有値問題になっていないが）により得られた疑似固有モードを示している。半無限境界と空洞および4つの空洞間に局所的な回転モードが生じており、半無限境界と上部空洞間の回転モードが卓越していることがわかる。Fig.6はFig.5に示した固有値解析により得た波数 aK_T （疑似固有値）を持つ横波を下方から入力した場合の変位場を示している。Fig.5と比べてみるとわかるように、上部空洞と半無限境界間の変位形態は非常によく似ていることがわかる。

5. おわりに 半無限弾性体内に空洞群を間削する場合は、半無限境界と空洞群の存在による弾性波の散乱現象のため空洞群周辺に局所的な共振現象が生じる可能性があり、半無限境界と空洞および空洞間の間削距離の選定および空洞の形状の選定には、この方向からの検討も必要となるのではないと思われる。また上記の疑似固有値は空洞の半径を10mとすれば約2.4 Hzに相当し、地震波の周波数帯に属しており、耐震的な空洞設計の重要な一要素となるものと考えられる。

参考文献

- 1) C.C.Mow and L.J.Mente, Dynamic Stresses and Displacements Around Cylindrical Discontinuities Due to Plane Harmonic Shear Waves, Journal of Applied Mechanics, Vol.30, 1963, pp.598-604.

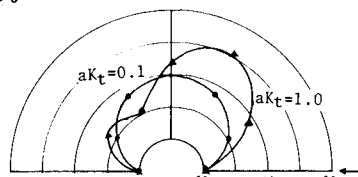


Fig.1 Distribution of $|u_r|$ for values aK_T with $\nu=0.25$

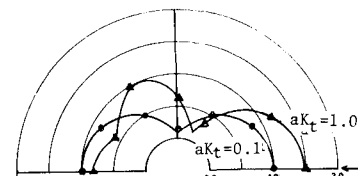


Fig.2 Distribution of $|u_\theta|$ for values aK_T with $\nu=0.25$

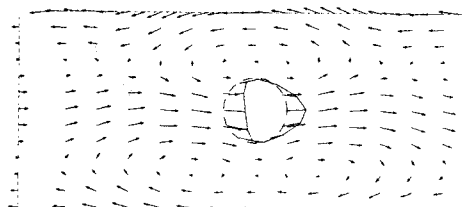


Fig.4 Distribution of displacement vectors around a cavity for $aK_r=1.0$ Imaginary Part (Incident SV-wave)

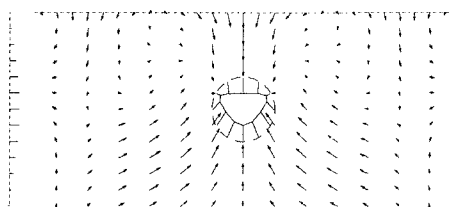


Fig.3 Distribution of displacement vectors around a cavity for $aK_L=0.577$ Imaginary Part (Incident P-wave)

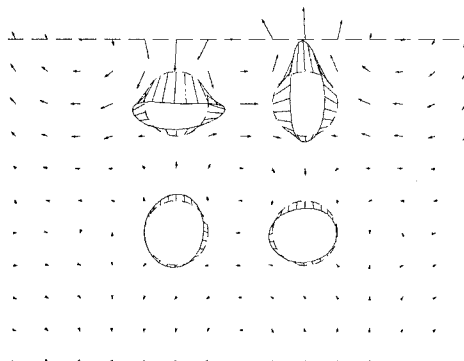


Fig.5 Eigen Mode (Eigen Parameter $aK_T=0.55$)

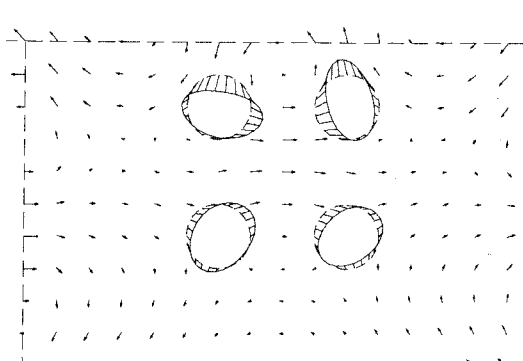


Fig.6 Distribution of displacement vectors around cavities for $aK_T=0.55$ Real Part (Incident SV-wave)