

京都大学大学院 学生員 廣瀬 壯一

京都大学工学部 正 員 丹羽 義次

同 正 員 大津 政康

1. まえがき

近年、トンネルや地下備蓄石油タンクなど巨大な地下構造物が建設され、それらの地震時の挙動が問題となっているが、その波動論的解析アプローチの一つに積分方程式法による解法がある。この解法は、無限、あるいは半無限の領域における解析に適しており、今後、さらに、その適用範囲が広がると考えられ、計算時間の短縮や精度の向上などが望まれる所である。そこで、本研究においては、地下空洞周辺の面外波動問題について解析した。この問題に対しては、のちに示すように鏡像法を用いて厳密解が求められているが、その適用範囲はきわめて狭いので、ここでは、自由表面を有限長さの境界に置き換えて、積分方程式法により定式化し、入射波のみを考慮した解法と、入射波と反射波を考慮した解法について比較検討した。

2. 積分方程式法による定式化

本研究で解析したモデルをFig. 1に示す。ただし、対象とする領域は、等方、等質の弾性体とし、すべての境界(C_1+C_2)では応力が0であるとする。

弾性体内部 V および境界(C_1+C_2)上の任意の点 $\xi(x, y)$ での面外変位を $u^T(x)$ とすると、 u^T は次の支配方程式(1)、および境界条件式(2)を満足する。

$$\nabla^2 u^T + k^2 u^T = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^T}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

ただし、 k は、入射波の波数、 n は、境界での法線方向単位ベクトルを表わす。

さらに、 u^T は次の3つの成分からなる。

$$u^T = u^I + u^R + u^S \quad (3)$$

ここに、 u^I は入射波を表わす。入射波は、定常平面波であると仮定し、その最大振幅を1として、 $u^I(x) = \exp[ik(x \sin \alpha + y \cos \alpha)]$ とする。ただし、 α は入射角である。 u^R は、空洞が存在しない場合の半無限弾性体の自由表面による反射波を表わす。 u^S は、空洞による散乱波を表わす。

以上の問題を積分方程式法による一重層ポテンシャル表示で表わすと、次の2つの解法が考えられる。

(I) 入射波のみを考慮した解法

$$u^T(x) = u^I(x) + \int_{C_1+C_2} \frac{1}{4} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) \mu_I(\xi) d\alpha_\xi, \quad x \in V \text{ または } C_1+C_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u^T(x)}{\partial n_x} = 0 = \frac{\partial u^I(x)}{\partial n_x} + \frac{1}{2} \mu_I(x) + \int_{C_1+C_2} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial n_x} (H_0^{(1)}(k|x-\xi|)) \mu_I(\xi) d\alpha_\xi, \quad x \in C_1+C_2 \quad (5)$$

(II) 入射波と反射波を考慮した解法

弾性波動論より、反射波 u^R は、 $u^R(x) = \exp[ik(x \sin \alpha - y \cos \alpha)]$ であるから、この解を用いて、

$$u^T(x) = u^I(x) + u^R(x) + \int_{C_1+C_2} \frac{1}{4} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) \mu_I(\xi) d\alpha_\xi, \quad x \in V \text{ または } C_1+C_2 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^T(x)}{\partial n_x} = 0 = \frac{\partial}{\partial n_x} (u^I(x) + u^R(x)) + \frac{1}{2} \mu_I(x) + \int_{C_1+C_2} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial n_x} (H_0^{(1)}(k|x-\xi|)) \mu_I(\xi) d\alpha_\xi, \quad x \in C_1+C_2 \quad (7)$$

これらは、境界を適当に分割し、数値的に解くことができる。半無限弾性体の自由表面は、ある適当な有限長さ $2L$ の境界 C_2 とし、 C_2 を $2L$ 個に等分割し、空洞における境界 C_1 は16等分割した。また、各分割区間内において、 μ_I 、あるいは μ_R は一定とする、いわゆるコンスタント近似により評価した。

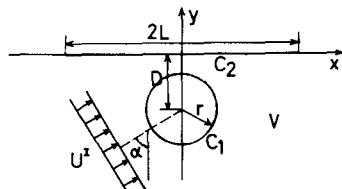


Fig. 1 解析モデル

3. 級数展開による解析方法

上述した2つの解法の精度を確かめるために、級数展開により解析解を求める。級数展開による解法は、積分方程式法のように、分割、あるいは数値積分による誤差はなく、収束性もかなり良いので、一応、厳密解と考えられる。鏡像の関係を用いれば、Fig. 2のように、無限弾性体内に A_1 、 A_2 の2つの空洞を考え、 $u^T = u_1^T + u_2^T + u_1^S + u_2^S$ とし、それぞれを次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} u_1^T(r_1, \theta_1) &= \exp[ik r_1 \cos(\theta_1 - \alpha)], \quad u_2^T(r_2, \theta_2) = \exp[ik r_2 \cos(\theta_2 - \alpha)] \\ u_1^S(r_1, \theta_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k r_1) (A_m \cos m \theta_1 + B_m \sin m \theta_1) \\ u_2^S(r_2, \theta_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k r_2) (A_m \cos m \theta_2 + B_m \sin m \theta_2) \end{aligned} \quad (8)$$

u_1^T 、および u_2^T は、Fig. 2に示すように各々入射波を表わしており、 u_1^S 、 u_2^S は各々空洞 A_1 、および A_2 による散乱波を表わす。このように仮定すれば、明らかに $y_1 = y_2 = D$ での応力は0となり、自由表面での応力条件は満足する。従って、式(8)を以下のFig. 2 鏡像法による解析モデルに座標変換し、級数展開して、空洞での境界条件 $\partial u / \partial r = 0$ を満足するように、 A_m 、 B_m を決定すればよい。

$$\begin{aligned} u_1^T(r_1, \theta_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (i)^m J_m(k r_1) (\cos m \alpha \cos m \theta_1 + \sin m \alpha \sin m \theta_1) \\ u_2^T(r_2, \theta_2) &= \exp[i 2 k D \cos \alpha] \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-i)^m J_m(k r_2) (\cos m \alpha \cos m \theta_2 - \sin m \alpha \sin m \theta_2) \\ u_1^S(r_1, \theta_1) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(k r_1) (A_m^* \cos m \theta_1 + B_m^* \sin m \theta_1) \\ u_2^S(r_2, \theta_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k r_2) (A_m^* \cos m \theta_2 + B_m^* \sin m \theta_2) \end{aligned}$$

ただし、 $A_m^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{mn}^+(2kD)$ 、 $B_m^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{mn}^+(2kD)$

$$P_{mn}^+(2kD) = \frac{\varepsilon_m}{2} (H_{n+m}^{(1)}(2kD) + (-1)^m H_{n-m}^{(1)}(2kD)), \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_m = 2 \quad (m \geq 1)$$

なお、Fig. 2に示した鏡像法を用いて、積分方程式法による定式化も可能である。

4. 結果と考察

積分方程式法による解法のうち、入射波のみを考慮した解法を解法I、入射波と反射波を考慮した解法を解法IIとする。また、級数展開による解法を解法IIIとする。以下に、数値計算例として、空洞の半径 r を1、空洞の深さ D を2、波数 k を0.5、入射角 α を 0° の場合を示す。

まず、自由表面の長さ L を10として、解法I、IIによる精度の違いを検討した。Fig. 3は、空洞の境界上の変位をそれぞれの解法ごとに表わしたものである。解法IIの方が解法Iよりも精度が良いことがわかる。次に、 L を少しずつ長くしていくと、解法Iによっても厳密解に収束していくが、その収束性は、解法IIの方がはるかに良い。

Fig. 4は、 $L=20$ として、半無限弾性体の自由表面における密度 μ_I と μ_{II} の分布を示したものである。 μ_{II} は、散乱波の影響しか含んでいないので、空洞から離れるに従って、急速に0に収束するが、 μ_I は、反射波と散乱波の両方の影響を含んでいるので、空洞から遠ざかっても、0には収束せずにある一定値に達する。式(4)、および式(6)より、密度 $\mu(x)$ は、点 x における u^T への影響度を示しているため、空洞から離れるにつれて μ_I が急速に0に近づく解法IIの方が、より良い精度で解を求められるのは当然であろう。

以上のように、反射波も考慮して、積分方程式法による定式化を行えば、簡単により良い精度で解が求まることが明らかになった。また、同一精度ならば、 L を短くし、計算容量を小さくすることができ、計算時間も短縮できる。さらに、本研究では、取り扱いの簡単な面外波動問題について解析を行なったが、より複雑な面内波動問題、すなわち、P波、SV波の問題についても同様なアプローチが可能であり、十分な精度の解が得られると思われる。

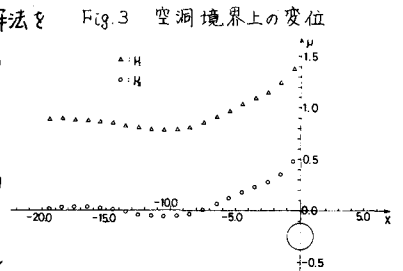
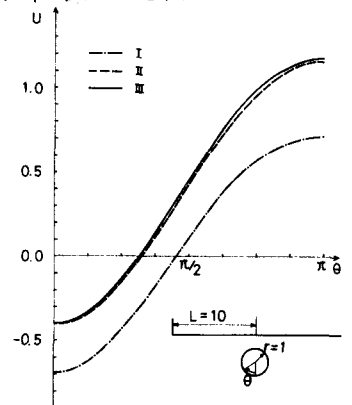
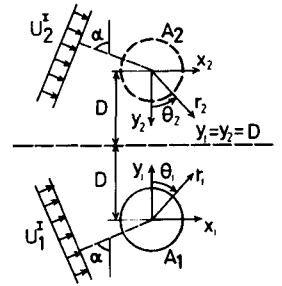


Fig. 4 自由表面での密度分布