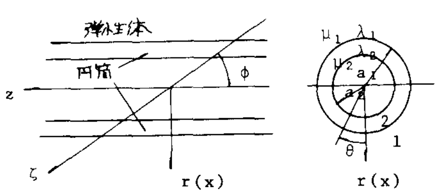
I-263　入射せん断波を受ける無限弾性体中にある厚肉円筒の応答解析

室蘭工業大学　正員　松岡健一
北海道大学　正員　能町純雄

1. まえがき　円孔を有する無限弾性体が平面波をうけるときの動的応答解析は，Pao[1]，Mowら[2]，や平井ら[3]によって行なわれている。とくに平井らは，せん断波が円孔の軸線を含む平面に平行に進む場合，任意の角度で入射するときの問題を，変位ポテンシャルを用いて解析し，動的応力集中係数を求めている。また，鵜飼ら[4]は，埋設円管の動的問題を，地盤を無限弾性体とし，円管を棒要素として，これを組合せて解析し動的ばね定数を中心として，種々検討している。

著者らもこれまで，円柱座標で表わされる波動伝播の問題を解析し[5]，またこれを覆工を施したトンネルや埋設円管に対応するように，せん断波をうける無限弾性体中の厚肉円筒の問題にも適用し，円筒をも三次元弾性体として解析する方法を示し，若干の計算も行なった[6]。ここではさらに種々の条件を設定し，多くの数計算を行なった結果を検討する。

2. 波動方程式の解　図−1に示すように座標をとり，$x-z$ 平面に平行に z 軸と φ の角度，ζ 方向からせん断波が入射するときの，波動方程式を満足する変位解は，u, v, w をそれぞれ，r, θ, z 軸方向の変位成分として，波動方程式にフーリエ·ハンケル変換を用いて解けば，円筒に対して



図−1 無限弾性体中の厚肉円筒

$$u=\frac{1}{\pi}\sum_m C_m(\widehat{A}_{mr}+\widehat{B}_{mr})\cos m\theta\cdot e^{i\omega(t-\frac{z\cos\varphi}{V_s})} \qquad (1)$$

$$v=\frac{1}{\pi}\sum_m(\widehat{A}_{mr}-\widehat{B}_{mr})\sin m\theta\cdot e^{i\omega(t-\frac{z\cos\varphi}{V_s})} \qquad (2)$$

$$w=\frac{1}{\pi}\sum_m C_m\widetilde{W}_{mr}\cos m\theta\cdot e^{i\omega(t-\frac{z\cos\varphi}{V_s})} \qquad (3)$$

ここで，$C_0=1/2$，$C_m=1\ (m\neq 0)$ であり

$$\widehat{A}_{mr}=\sum_{k=1}^{2}\Big[\frac{1}{N_\mu}\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)\Big\{\frac{1}{2\mu}\alpha_{mk}+(m+1)A_{mk}+(m-1)B_{mk}-i\frac{N}{2}E_{mk}\Big\}+\frac{\mu N^2}{\rho\omega^2}\Big\{\frac{1}{N_\mu}\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)-\frac{N_\alpha}{N^2}\chi_{mp}^{(k)}(N_\alpha r)\Big\}\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mk}+(m+1)A_{mk}-(m-1)B_{mk}+iNE_{mk}\Big\}\Big] \qquad (4)$$

$$\widehat{B}_{mr}=\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{1}{N_\mu}\chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r)\Big\{\frac{1}{2\mu}\alpha_{mk}+(m+1)A_{mk}+(m-1)B_{mk}+i\frac{N}{2}E_{mk}\Big\}+\frac{\mu N^2}{\rho\omega^2}\Big\{\frac{1}{N_\mu}\chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r)-\frac{N_\alpha}{N^2}\chi_{ms}^{(k)}(N_\alpha r)\Big\}\times\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mk}+(m+1)A_{mk}-(m-1)B_{mk}+iNE_{mk}\Big\}\Big] \qquad (5)$$

$$\widetilde{W}_{mr}=\sum_{k=1}^{2}\Big[G_m^{(k)}(N_\mu r)E_{mk}-i\frac{2\mu N}{\rho\omega^2}\Big\{G_m^{(k)}(N_\alpha r)-G_m^{(k)}(N_\mu r)\Big\}\times\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mk}+(m+1)A_{mk}-(m-1)B_{mk}+iNE_{mk}\Big\}\Big] \qquad (6)$$

ここで，

ω：角速度，V_s；せん断波の速度，μ, λ；Lamé の弾性定数，ρ；密度，$N=\omega\cos\varphi/V_s$

であり，式中の関数は，a_1, a_2 を円筒の外内径として

$$G_m^{(k)}(Nr)=\frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)},\quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr)=\frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)},$$

$$\chi_{ms}^{(k)}(Nr)=\frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)},\quad a_0=a_2 \text{ として}$$

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr)=I_j(Nr)K_m(Na_{k-1})-(-1)^{j+m}I_m(Na_{k-1})K_j(Nr)$$

となる。ただし，I，K は変形第1種および第2種のベッセル関数である。また

$$N_\mu^2=N^2-\rho\omega^2/\mu,\quad N_\alpha^2=N^2-\rho\omega^2/(2\mu+\lambda) \qquad (7)$$

さらに，式中の係数 α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位および応力で与えられるものである。

式(4)〜(6)は円筒に対してのものであるが，円孔を有する無限体の場合は，これらの式で $a_1=\infty$ とし $k=2$ のもののみを考慮することにより得られるものに入射波動を加えることにより与えられるが，このとき式(4)〜(6)中の関数は，

$$G_m^{(1)}(Nr)=\frac{K_m(Nr)}{K_m(Na_2)},\quad \chi_{mp}^{(1)}(Nr)=-\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na_2)},$$

$$\chi_{ms}^{(1)}(Nr)=-\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na_2)},$$

となり，入射波動は，円柱座標で表わして

$$u^i=U_0\exp[i\omega\{t-(z\cos\varphi-r\sin\varphi\cos\theta)/V_s\}]\cos\varphi\cos\theta \qquad (8)$$

$$v^{\circ}=-U_0\exp[i\omega\{t-(z\cos\varphi-r\sin\varphi\cos\theta)/V_S\}]\cos\varphi\sin\theta\ , \qquad (9)$$

$$w^{\circ}=U_0\exp[i\omega\{t-(z\cos\varphi-r\sin\varphi\cos\theta)/V_S\}]\sin\varphi \qquad (10)$$

3. 境界条件

入射せん断波をうける弾性体中の円筒の解析は，上で求めた円孔を有する無限弾性体と円筒の解を境界条件を満足するように組合せて行なうが，式(4)～(6)中の係数のうち，A，Bはまず次の適合条件を満足しなければならない。

$$a_k A_{mk}=\tilde{A}_{mr})_{r=a_k}\ ,\ (11) \qquad a_k B_{mk}=\tilde{B}_{mr})_{r=a_k}\ , \qquad (12)$$

ここで，無限体の変位および応力に関係するものを上添字1，円筒の変位および応力に関係するものを上添字2で区別するものとし，弾性体と円筒の境界では変位および応力が連続であるものとすれば，

i) $r=a_1$において；

$$u^1+u^{\circ})_{r=a_1}=u^2)_{r=a_1}\ (13),\quad v^1+v^{\circ})_{r=a_1}=v^2)_{r=a_1}\ ,\ (14)$$

$$w^1+w^{\circ})_{r=a_1}=w^2)_{r=a_1}\ ,\ (15),\quad \tau^1_{r\theta}+\tau^{\circ}_{r\theta})_{r=a_1}=\tau^2_{r\theta})_{r=a_1}\ , \quad (16)$$

$$\tau^1_{rz}+\tau^{\circ}_{rz})_{r=a_1}=\tau^2_{rz})_{r=a_1}\ (17),\quad \sigma^1_r+\sigma^{\circ}_r)_{r=a_1}=\sigma^2_r)_{r=a_1}\ (18)$$

を満足しなければならない。ここでベッセル関数J_mは，積分表示で

$$J_m(x)=i^{-m}\int_0^{\pi}e^{ix\cos\theta}\cos m\theta\, d\theta/\pi\ , \qquad (19)$$

と表わされるので

$$e^{ix\cos\theta}=2\sum_m C_m i^m J_m(x)\cos m\theta\ , \qquad (20)$$

従って

$$\exp[i\omega\{t-(z\cos\varphi-r\sin\varphi\cos\theta)/V_S\}]$$
$$=\exp\{i\omega(t-z\cos\varphi/V_S)\}2\sum_m i^m J_m(\omega r\sin\varphi/V_S)\cos m\theta\, C_m\ , \quad (21)$$

となる。この関係を式(8)～(10)に用い，さらに境界条件(13)～(18)に代入して条件式をえることが出来るが，条件(13)～(15)についてのみ示せば，

$$A^2_{m1}=A^1_{m2}-U_0\pi\cos\varphi\cdot i^{m-1}J_{m+1}(\omega a_1\sin\varphi/V_S)\ , \qquad (22)$$

$$B^2_{m1}=B^1_{m2}+U_0\pi\cos\varphi\cdot i^{m-1}J_{m-1}(\omega a_1\sin\varphi/V_S)\ , \qquad (23)$$

$$E^2_{m1}=E^1_{m2}+U_0\pi\sin\varphi\cdot i^{m}J_{m}(\omega a_1\sin\varphi/V_S)\ , \qquad (24)$$

となる。他の条件も同様に展開出来るが，ここでは省略する。

ii) $r=a_2$において； 円筒の内面は中空であるものとすれば，

$$\tau^2_{r\theta})_{r=a_2}=0 \quad \therefore\ \alpha^2_{m2}=0\ , \qquad (25)$$

$$\sigma^2_r)_{r=a_2}=0 \quad \therefore\ \beta^2_{m2}=0\ , \qquad (26)$$

$$\tau^2_{rz})_{r=a_2}=0\ , \qquad (27)$$

を満足しなければならない。

以上の条件を満足するように各係数を求めることにより，各変位および応力成分を求めることができる。

4. 数値計算

数値計算例として，ポアソン比$\nu=0.25$，円筒と弾性体の弾性係数比$E_2/E_1=10, 100, 1000$，円筒の内外径比$a_1/a_2=1.05, 1.1, 1.2$のものについて数値計算を行なった。ここではこのうち$\varphi=\pi/4$，$E_2/E_1=100$のものの円周方向歪ε_θのωに対する変化を図-2に示す。

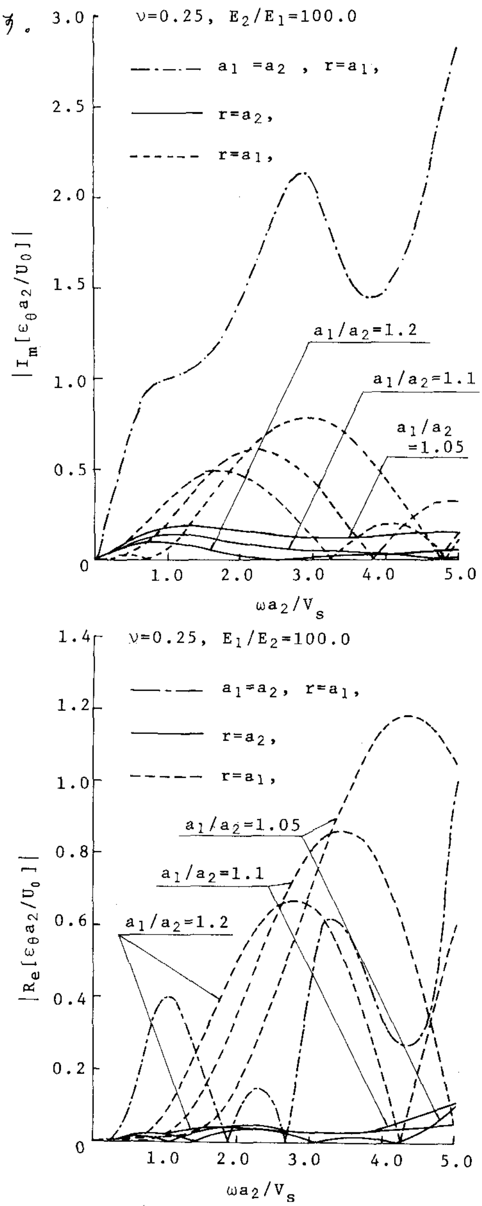


図-2 ωとε_θの関係($\theta=\pi/2,\ \varphi=\pi/4$)

(参考文献)

1) Pao, Y.H.; J. Appl. Mech. 29, 299, 1962. 2) Mow, C.C. and Mente, L.J.; J. Appl. Mech. 30, 598, 1963. 3) 平井, 佐武; 第34回学術講演集 第1部, 493, 1979. 4) 鵜飼, 山口; 土質工学論文報告集 Vol.19 No.4, 93, 1979. 5) 能町, 松岡, 坂下; 土木学会論文報告集 第295号, 1, 1980. 6) 松岡, 能町; 北海道支部論文集 No.27.