I-262　地中に設置された貯水管の強制振動

信州大学　正員○夏目正太郎
〃　〃　石川清志
金沢工大　〃　谷本勉之助

1. まえがき

細長い構造物が地中に建造されているとき、周辺からの振動外力が作用すれば、この構造物には縦振動とたわみ振動とが同時に作用することになろう。それ故、あたかも軸力が作用する棒の振動性状を考えることになろう。加うるに鉛直に建造されていることにより、自重は水圧分布に类似した圧縮力として各部水平断面に軸力のように働らくであろう。特に、地中数十メートルにおよぶ深さにまで達する埋設管ともなれば、自重の影響は見逃がせないものとなる筈である。そして、静的な荷重としてでなく、大きなエネルギーをもった地震等による突き上げがあったとき、細長い構造物である故に地中に埋設されていても座屈による破壊を考えておかねばならない。この様な環境のもとにある細長い構造物の強制振動は、振動入力としては縦振動とたわみ振動とが同時に作用するとしても、考え方としては、先ず縦振動を解き、それによる桁の軸方向の圧縮力の大きさを評価して、それによる軸力が作用している棒のたわみ振動を解くようにするのが望ましいと思う。自重に関しては、振動があろうとなかろうと常に作用しているのであるが、動力学的な作用を考えるのである。

2. 縦振動について

地中数十メートルを突貫いて建設されるので、幾つかの地層が分布している。弾性地盤として考えられるとすればそれら地層ではそれぞれ異なったWinkler常数 k_i を考えて、弾性地盤内の棒の縦振動を解くことになる。

$$\frac{EA}{L^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + k_u U = 0 \qquad (1)$$

$$U = \lfloor \cos\lambda\rho \quad \sin\lambda\rho \rfloor N_u e^{i\omega t} \;;\quad \lambda^2 = \left(\frac{\gamma A\omega^2}{g} + k_u\right)\frac{L^2}{EA} \qquad (2)$$

地層を貫通しているので、棒自体は一様断面と考えてもバネ常数が異なるので、細分割して移行演算による手法を採る。従って細分割した区間における自重の分布は、区間の k 点で

$$w_{gk} = \lfloor 1 \quad k \rfloor \begin{bmatrix} \eta w_{g0} - \xi w_{g1} \\ w_{g1} - w_{g0} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\eta - \xi} \qquad (3)$$

の様な式で示される。故に区間に亘って積分すれば"分布荷重マトリクス"が得られ(静力学)、これに加速度を乗じて微小区間の平衡条件を考え、分布荷重であることを考慮すれば、振動時における"質量マトリクス"を得る。移行演算をするとき、区間の1端($\rho=0$ 端)から他端($\rho=1$ 端)へ移るにも固有マトリクス N_u から N_u' の記法にかわる。このとき (3) 式を考慮して

$$N_u' = C_u N_u \qquad (4)$$

とせねばならず、この中の C_u が"質量マトリクス"である。縦振動の状態量としては、伸縮変位 u と、軸力 F とであるからそれらを総合して記せば、同次解では

$$W_u = D_u R_u N_u e^{i\omega t} \qquad (5)$$

のようになり、(2) 式を参照して誘導されるのである。添え字 u は伸縮変位によることを示す。連続条件を示すと、

$$D_{ur} R_{ur} N_{ur} = D_{ur-1} R_{ur-1} N'_{ur-1} \qquad (6)$$

となるので、漸化方式により、最初の区間の固有マトリクス N_1 で各区間のそれらを表示出来、最後に境界条件にて、振動数方程式を得る。これにより C_u が存在するときの振動(タテ)の固有値が定まる。

（2）式で判るように未定常数$\mathbf{N}_u$は久この要素であるので、固有値が決定されると、それぞれの固有値ごとに

$$\mathbf{N}_{ui} = \mathbf{P}_u(\omega_i)\,\mathbf{\Omega}_i \tag{7}$$

の関係を得る。 次ぎに縦振動外力が作用しているのであるからこれを特解として求めれば、荷重マトリクス$\mathbf{K}_u$の中に外力の大きさをとり入れて、

$$\mathbf{N}'_{up} = \mathbf{C}_{up}\mathbf{N}_{up} + \mathbf{K}_u \tag{8}$$

で、その状態量は

$$\mathbf{W}_{up_r} = \mathbf{D}_{up_r}\mathbf{R}_{up_r}(\mathbf{C}_{up}\mathbf{N}_{up} + \langle \mathbf{K}_u \rangle)\sin pt \tag{9}$$

となる故に、同次方程式の解と共に記せば

$$\mathbf{W}_r = \sum \mathbf{D}_u \overbrace{\mathbf{R}_u \mathbf{P}}^{\mathbf{Q}_r}(\omega_i)\,\mathbf{\Omega}_i e^{i\omega t} + \mathbf{D}_{up_r}\mathbf{R}_{up_r} \quad (\mathbf{C}_{up}\mathbf{N}_{up} + \langle \mathbf{K}_u \rangle)\sin pt \tag{10}$$

ここで未定常数$\mathbf{\Omega}_i$を決定するために初期条件として、伸縮がないことと、初期変形速度がゼロを入れることにより、連立方程式を立てるのであるが、各固有値毎にΩがあるのでこれら変位の式と速度の式をフーリエ級数で表示して、同類項の係数の和がゼロになることで、(10)式より誘導され未定常数Ωが次のようにして定まる。

$$A(\omega)\cdot\mathbf{\Omega} = B(p) \tag{11}$$

求まったΩ_iは（10）へ代入することにより、各区間における状態量が定められる。

3．たわみ振動について

縦振動の解より、軸力の大きさがわかったので、軸力が作用している棒としてたわみ振動の方程式を書くと、

$$\frac{EI}{L^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{|F|}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_w w = 0 \tag{12}$$

となるが、この解は物理的常数や軸力Fの大きさにより5通り考えねばならない。すなわち

$$
\begin{aligned}
&(A)\ \frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w > 0 \ : \ w = \lfloor \cosh\mu\rho \ \ \sinh\mu\rho \ \ \cos\nu\rho \ \ \sin\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}, \ \begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{|F|}{2EI}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{4EI}{|F|^2}\left(\frac{\gamma A\omega^2}{g}-k_w\right)} \mp 1}\cdot L \\
&(B)\ \frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w = 0 \ : \ w = \lfloor \nu\rho\cos\nu\rho \ \ \nu\rho\sin\nu\rho \ \ \cos\nu\rho \ \ \sin\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}, \ \nu = \sqrt{\frac{|F|}{EI}}\cdot L \\
&(C)\ 0 > \frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w > -\frac{F^2}{4EI} \ : \ w = \lfloor \cos\mu\rho \ \ \sin\mu\rho \ \ \cos\nu\rho \ \ \sin\nu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}, \ \begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{|F|}{2EI}}\sqrt{1 \mp \sqrt{1+\frac{4EI}{F^2}\left(\frac{\gamma A\omega^2}{g}-k_w\right)}}\cdot L \\
&(D)\ \frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w = -\frac{F^2}{4EI} \ : \ w = \lfloor \mu\rho\cos\mu\rho \ \ \mu\rho\sin\mu\rho \ \ \cos\mu\rho \ \ \sin\mu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}, \ \mu = \sqrt{\frac{|F|}{2EI}}\cdot L \\
&(E)\ -\frac{F^2}{4EI} > \frac{\gamma A\omega^2}{g} - k_w \ ; \ w = \lfloor e^{\nu\rho}\cos\mu\rho \ \ e^{\nu\rho}\sin\mu\rho \ \ e^{-\nu\rho}\cos\mu\rho \ \ e^{-\nu\rho}\sin\mu\rho \rfloor \mathbf{N} e^{i\omega t}, \ \begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{|F|}{EI}}\sqrt{\sqrt{\frac{4EI}{F^2}\left(k_w-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\right)} \pm 1}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる。故に細分割した各区間において、(A)～(E)のうちどの領域に入るかを考慮して、移行演算を続行し、同次解からは、たわみ振動固有値が、それぞれの縦振動の強さごとに求まるし、ひいては特解よりたわみ振動強制力による、状態量を算定出来る。また、縦振動の強さが変化すれば、同次解におけるたわみ振動数を固定しておいて、軸力による座屈値をも算定出来る。これが細長い構造物であれば必ず考慮されねばならぬ点であり、その大きさの分布を振動数と関連づけておきたいと願っている。解析方法は、縦振動のものと殆んど同じでよく、境界条件は底部のものと、最上端のものとそれぞれ2つずつあるので$\mathbf{N}$に含まれる4つの未定常数を消去したり（同次解）、決定したり（特解）する。なお初期条件よりΩ_wを決定する手法も既述と同じである。

4．むすび

平面骨組構造の強制振動を手がけようとしているときに、連続体として骨組構造を振動させれば、面内、面外の挙動とも考慮せねばならぬ。そこへ到達する一段階手前にて整理してみたものである。