I-261　半無限弾性体内部の点加振問題の解析

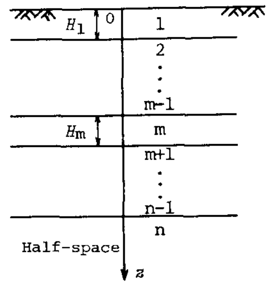
神戸大学　学○高谷富也　正　北村泰寿　正　桜井春輔

1. まえがき

本文は，半無限弾性体内に点加振力が存在する場合の地中変位を求める計算法を示したものである。この問題に関する研究としては，Awojobiら[1]，松岡ら[2]の論文がみられる。一方，本文では，多層弾性体の分散関数の定式化を行うためHaskell[3]が用いた変位・応力の一般解をベクトル・マトリックス表現で求める方法を利用して変位式を誘導した。

2. 基本式

図－1に示すような多層弾性体モデルを考えるとき，第m層の変位，応力の一般解は以下のように誘導できる。なお，本文では式の記述において，時間項 $e^{i\omega t}$ は省略する。



図－1　多層弾性体

上下点加振問題

$$\left\{-\frac{u_r}{kJ_1(kr)},\ \frac{u_z}{J_0(kr)},\ -\frac{\tau_{zr}}{k\mu_1 J_1(kr)},\ \frac{\sigma_z}{\mu_1 J_0(kr)}\right\}_m^T=[D_m]\left\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\right\}_m^T \qquad (1)$$

ただし，μ_1は第1層のせん断弾性係数，$J_0(\ )$，$J_1(\ )$は0次，1次のBessel関数，$C_1 \sim C_4$は未知係数である。

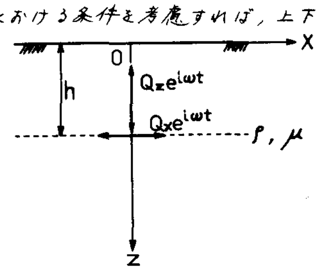
水平点加振問題

$$\left\{\frac{\overline{u}}{kJ_2(kr)},\ -\frac{\overline{v}}{kJ_0(kr)},\ \frac{\overline{w}}{J_1(kr)},\ -\frac{\overline{\tau_1}}{k\mu_1 J_2(kr)},\ \frac{\overline{\tau_2}}{k\mu_1 J_0(kr)},\ -\frac{\overline{\sigma}}{\mu_1 J_1(kr)}\right\}_m^T=[D_m]\left\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6\right\}_m^T \qquad (2)$$

ただし，$\overline{u}=u_y/\cos\theta\sin\theta$，$\overline{v}=2u_x-u_y\cos 2\theta/\cos\theta\sin\theta$，$\overline{w}=u_z/\cos\theta$，$\overline{\tau_1}=\tau_{zr}/\cos\theta+\tau_{\theta z}/\sin\theta$，$\overline{\tau_2}=\tau_{zr}/\cos\theta-\tau_{\theta}\ /\sin\theta$，$\overline{\sigma}=\sigma_z/\cos\theta$，$J_2(\ )$は2次のBessel関数，$C_1 \sim C_6$は未知係数である。

なお，式(1)，(2)に含まれているマトリックス$[D_m]$は文献4)に詳しく述べられており，講演時に示す。

いま，図－2のように深さhの載荷位置に仮想境界面を設け，境界面と表面における条件を考慮すれば，上下点加振において次式を得る。



図－2　解析モデル

$$\begin{Bmatrix} C_1\\ 0\\ C_3\\ 0\end{Bmatrix}^{(2)}=[D_2]^{-1}_{z=0}[D_1]_{z=h}[D_1]^{-1}_{z=0}\begin{Bmatrix} u_r^*\\ u_z^*\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}^{(1)}_{z=0}+[D_2]^{-1}_{z=0}\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ Q^*\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r^*\\ u_z^*\\ \tau_{zr}^*\\ \sigma_z^*\end{Bmatrix}^{(1)}=[D_1]\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{Bmatrix}^{(1)}=[D_1][D_1]^{-1}_{z=0}\begin{Bmatrix} u_r^*\\ u_z^*\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}^{(1)}_{z=0} \qquad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r^*\\ u_z^*\\ \tau_{zr}^*\\ \sigma_z^*\end{Bmatrix}^{(2)}=[D_2]\begin{Bmatrix} C_1\\ 0\\ C_3\\ 0\end{Bmatrix}^{(2)}=[D_2][D_2]^{-1}_{z=0}[D_1]_{z=h}[D_1]^{-1}_{z=0}\begin{Bmatrix} u_r^*\\ u_z^*\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}^{(1)}_{z=0}+[D_2][D_2]^{-1}_{z=0}\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ Q^*\end{Bmatrix} \qquad (5)$$

ただし，$u_r^*=-u_r/kJ_1(kr)$，$u_z^*=u_z/J_0(kr)$，$\tau_{zr}^*=-\tau_{zr}/k\mu J_1(kr)$，$\sigma_z^*=\sigma_z/\mu J_0(kr)$，$Q^*=-Q_z k/2\pi\mu$，上指標(1)，(2)は仮想境界面より上の部分および下の部分を意味する。

同様に，水平点加振においては，上式(3)～(5)の列ベクトルの代わりに，$\{C_1,\ 0,\ C_3,\ 0,\ C_5,\ 0\}^{(2)T}$，$\{u^*,\ v^*,\ w^*,\ 0,\ 0,\ 0\}^{(1)T}_{z=0}$，$\{u^*,\ v^*,\ w^*,\ \tau_1^*,\ \tau_2^*,\ \sigma^*\}^{(i)T}(i=1,2)$，$\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ Q^*,\ 0\}^T$が用いられる。ただし，$u^*=\overline{u}/kJ_2(kr)$，$v^*=-\overline{v}/kJ_0(kr)$，$w^*=\overline{w}/J_1(kr)$，$\tau_1^*=-\overline{\tau_1}/k\mu J_2(kr)$，

$\tau_z^* = \overline{\tau_z}/k\mu \; J_0(kr)$, $\sigma^* = -\overline{\sigma}/\mu \; J_1(kr)$, $Q^* = -Q_x/\pi\mu$ である。

3．マトリックス積の分解による定式化

まず，上下点加振による変位式は，式(3)〜(5)より次の形で与えられる。

$$U_r = \frac{Q_z}{2\pi\mu}\int_0^\infty \frac{k^2 U(k)}{F(k)} J_1(kr)\,dk \quad \text{———} (6) \qquad U_z = -\frac{Q_z}{2\pi\mu}\int_0^\infty \frac{k W(k)}{F(k)} J_0(kr)\,dk \quad \text{———} (7)$$

また，水平点加振（x方向加振）問題に対しては次式を得る。

$$U_x = -\frac{Q_x}{4\pi\mu}\int_0^\infty \left\{\frac{kH(k)}{F(k)} - \frac{k}{2\beta}E(k)\right\}J_0(kr) - \cos 2\theta\left\{\frac{kH(k)}{F(k)} + \frac{k}{2\beta}E(k)\right\}J_2(kr)\,dk \quad \text{———} (8)$$

$$U_y = \frac{Q_x}{2\pi\mu}\cos\theta\sin\theta\int_0^\infty\left\{\frac{kH(k)}{F(k)} + \frac{k}{2\beta}E(k)\right\}J_2(kr)\,dk \quad \text{———} (9)$$

$$U_z = -\frac{Q_x}{2\pi\mu}\cos\theta\int_0^\infty \frac{k^2 V(k)}{F(k)} J_1(kr)\,dk \quad \text{———} (10)$$

ただし，$\alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}$，$\beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$，$k_p = \omega/V_p$，$k_s = \omega/V_s$，$V_p$, V_s はそれぞれ縦波，横波の伝播速度，ω は波動の円振動数とすれば，上式における各記号は次のようになる。

$$F(k) = (2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2\alpha\beta \quad (\text{Rayleigh関数}), \qquad \overline{F(k)} = (2k^2 - k_s^2)^2 + 4k^2\alpha\beta$$

$$U(k) = \frac{1}{2k_s^2}\Big[\left\{\overline{F(k)}e^{-\alpha h} - 4k^2(2k^2-k_s^2)e^{-\beta h}\right\}e^{-\alpha z} - \left\{4\alpha\beta(2k^2-k_s^2)e^{-\alpha h} - \overline{F(k)}e^{-\beta h}\right\}e^{-\beta z}$$
$$\mp F(k)\left\{e^{\pm\alpha(z-h)} - e^{\pm\beta(z-h)}\right\}\Big]$$

$$W(k) = \frac{1}{2\beta k_s^2}\Big[\alpha\beta\left\{\overline{F(k)}e^{-\alpha h} - 4k^2(2k^2-k_s^2)e^{-\beta h}\right\}e^{-\alpha z} - k^2\left\{4\alpha\beta(2k^2-k_s^2)e^{-\alpha h} - \overline{F(k)}e^{-\beta h}\right\}e^{-\beta z}$$
$$+ F(k)\left\{\alpha\beta e^{\pm\alpha(z-h)} - k^2 e^{\pm\beta(z-h)}\right\}\Big]$$

$$H(k) = \frac{1}{2\alpha k_s^2}\Big[k^2\Gamma e^{-\alpha z} - \alpha\beta\Lambda e^{-\beta z} - F(k)\left\{k^2 e^{\pm\alpha(z-h)} - \alpha\beta e^{\pm\beta(z-h)}\right\}\Big]$$

$$E(k) = e^{-\beta(z+h)} + e^{\pm\beta(z-h)}$$

$$V(k) = -\frac{1}{2k_s^2}\Big[\Gamma e^{-\alpha z} - \Lambda e^{-\beta z} + F(k)\left\{e^{\pm\alpha(z-h)} - e^{\pm\beta(z-h)}\right\}\Big]$$

$$\Gamma = \overline{F(k)}e^{-\alpha h} - 4\alpha\beta(2k^2-k_s^2)e^{-\beta h}, \qquad \Lambda = 4k^2(2k^2-k_s^2)e^{-\alpha h} - \overline{F(k)}e^{-\beta h}$$

なお，上下点加振による変位式(6)，(7)の $U(k)$, $W(k)$，および水平点加振による変位式(8)〜(10)の $H(k)$, $E(k)$, $V(k)$ 内における符号(±)はそれぞれ仮想境界面より上の部分および下の部分を意味する（複号同順）。

4．数値計算法

式(6)〜(10)の数値計算については，次式に示す方法によって行う。

$$\int_0^\infty I(k)\,dk = P\!\!\int_0^X\left\{I(k) - \lim_{k\to\infty} I(k)\right\}dk + \int_0^\infty \lim_{k\to\infty} I(k)\,dk - i\pi\,Res(k_0) \quad \text{———} (11)$$

ただし，$P\!\int$ は Cauchy の主値，$Res(k_0)$ は極 k_0 での留数，$I(k)$ は収束関数，$\lim_{k\to\infty} I(k)$ は $k \gg 0$ での近似式を意味する。また，式(11)は $k \gg 0$ での近似式を差引くことによって，主値積分の収束を早め数値積分を有限な積分上限値 X で終らせるように操作したものである。

5．あとがき

本文は，半無限弾性体内に点加振力が作用する場合の地中変位式の定式化および数値計算法について述べたものである。なお，加振位置を表面，すなわち $h=0$ とすれば，半無限弾性体表面に作用する点加振による変位式に一致することが確められる。また，本文では，紙面の都合上，定式化および数値計算法を示したが，計算結果については講演時に譲る。

参考文献）1) Awojobi, A. O. and O. A. Sobayo ; Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 131−143, 1977.　2)松岡理，八幡夏恵子；第5回日本地震工学シンポジウム，pp. 425−432，1978.

3) Haskell, N. A. ; Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 43, pp. 17−34, 1953.

4) 北村，桜井，陳；建設工学研究所報告，No. 22，pp. 145−166，1980.