

北海道開発局土木試験所 正員 吉田 純一
北海道大学 工学部 正員 能研 純雄

1. まえがき

3次元弾性体の動的応答問題についてはすでに多くの研究がなされているが、層状体の一部に振動入力がある場合の動的応答についての研究はあまり見られないように思われる。本文ではこのような層状体の動的応答を求める目的で有限平板法の適用を検討した。有限平板法は、弾性体を一定厚さに分割し、この境界面での力-変位関係式を θ, r 方向に Fourier-Hankel 変換を用い、板の厚さ方向には各変位成分を一次変化と仮定して Galerkin 法を適用して導いた平板要素を用いるものである。

2. 平板要素の基本式

図-1 に示すように半径方向に r 、接線方向に θ 、平板の厚さ方向に z 軸をとリ、それぞれの方角の変位を u, v, w とした円柱座標系の運動方程式に、変位を z 方向に一次変化と仮定して Galerkin 法を適用し、 r 方向に Hankel 変換 θ 方向に Fourier 変換を行なうと(2)~(4)式が得られる。ただし、ここで

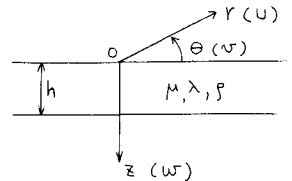


図-1. 座標系.

は周期的外力で定常状態を考えるので、 p を外力の円振動数として各変位成分を(1)式のように表わす。

$$u = \tilde{u} e^{i p t}, \quad v = \tilde{v} e^{i p t}, \quad w = \tilde{w} e^{i p t}. \quad (1)_{1,2,3}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{am\xi}^{(0)} &= 2\mu (A_{m\xi}^{(h)} - A_{m\xi}^{(0)})/h - (\mu\xi^2 - p^2)h (2A_{m\xi}^{(0)} + A_{m\xi}^{(h)})/3, \\ Q_{am\xi}^{(h)} &= 2\mu (A_{m\xi}^{(h)} - A_{m\xi}^{(0)})/h + (\mu\xi^2 - p^2)h (2A_{m\xi}^{(h)} + A_{m\xi}^{(0)})/3. \end{aligned} \right\} (2)_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{bm\xi}^{(0)} &= 2\mu (B_{m\xi}^{(h)} - B_{m\xi}^{(0)})/h - (\mu\alpha\xi^2 - p^2)h (2B_{m\xi}^{(0)} + B_{m\xi}^{(h)})/3 - 2\mu\xi W_{m\xi}^{(0)} - (\mu+\lambda)\xi(W_{m\xi}^{(h)} - W_{m\xi}^{(0)}), \\ Q_{bm\xi}^{(h)} &= 2\mu (B_{m\xi}^{(h)} - B_{m\xi}^{(0)})/h + (\mu\alpha\xi^2 - p^2)h (2B_{m\xi}^{(h)} + B_{m\xi}^{(0)})/3 - 2\mu\xi W_{m\xi}^{(h)} + (\mu+\lambda)\xi(W_{m\xi}^{(h)} - W_{m\xi}^{(0)}). \end{aligned} \right\} (3)_{1,2}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{zm\xi}^{(0)} &= \mu\alpha (W_{m\xi}^{(h)} - W_{m\xi}^{(0)})/h - (\mu\xi^2 - p^2)h (2W_{m\xi}^{(0)} + W_{m\xi}^{(h)})/6 + \lambda\xi B_{m\xi}^{(0)} + (\mu+\lambda)\xi(B_{m\xi}^{(h)} - B_{m\xi}^{(0)})/2, \\ Q_{zm\xi}^{(h)} &= \mu\alpha (W_{m\xi}^{(h)} - W_{m\xi}^{(0)})/h + (\mu\xi^2 - p^2)h (2W_{m\xi}^{(h)} + W_{m\xi}^{(0)})/6 + \lambda\xi B_{m\xi}^{(h)} - (\mu+\lambda)\xi(B_{m\xi}^{(h)} - B_{m\xi}^{(0)})/2. \end{aligned} \right\} (4)_{1,2}$$

上式中 μ, λ : ラーメの定数, $\alpha = (2\mu + \lambda)/\mu$, h : 平板要素の厚さ, p : 円振動数 ρ : 単位体積質量

$$\left. \begin{aligned} A_{m\xi} &= \int_0^\infty r \{ (C_m[\tilde{u}] + S_m[\tilde{v}]) J_{m+1}(\xi r) \pm (C_m[\tilde{v}] - S_m[\tilde{u}]) J_{m-1}(\xi r) \} dr, \\ B_{m\xi} &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{w}] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} (5)_{1,2,3}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{am\xi} &= \int_0^\infty r \{ (C_m[\tilde{r}_2] + S_m[\tilde{r}_0]) J_{m+1}(\xi r) \pm (C_m[\tilde{r}_0] - S_m[\tilde{r}_2]) J_{m-1}(\xi r) \} dr \\ Q_{bm\xi} &= \int_0^\infty r C_m[\tilde{r}_2] J_m(\xi r) dr \end{aligned} \right\} (6)_{1,2,3}$$

であり、 $C_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cos m\theta d\theta$, $S_m[f] = \int_0^{2\pi} f \sin m\theta d\theta$, $J_m(x)$ は m 次の Bessel 関数、 $A_{m\xi}^{(0)}, A_{m\xi}^{(h)}$ 等は $z=0, h$ の値を表す。

式(2)~式(4)を用いて各平板間での力のつり合を考えると解く事により各変位を求める事ができる。ただし変位の逆変換は次で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \xi \{ (A_{m\xi} + B_{m\xi}) J_{m+1}(\xi r) \pm (A_{m\xi} - B_{m\xi}) \} d\xi \int_0^{2\pi} \cos m\theta, \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \xi \{ (A_{m\xi} + B_{m\xi}) J_{m+1}(\xi r) \pm (A_{m\xi} - B_{m\xi}) \} d\xi \int_0^{2\pi} \sin m\theta, \\ \tilde{w} &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\infty \xi W_{m\xi} J_m(\xi r) d\xi \int_0^{2\pi} \cos m\theta. \end{aligned} \right\} (7)_{1,2,3}$$

3. 差分方程式

平板要素 k と $k+1$ で力のつり合をとると

$$Q_{am\xi, k+1}^{(0)} - Q_{am\xi, k}^{(h)} = T_{am\xi, k}, \quad Q_{bm\xi, k+1}^{(0)} - Q_{bm\xi, k}^{(h)} = T_{bm\xi, k}, \quad Q_{zm\xi, k+1}^{(0)} - Q_{zm\xi, k}^{(h)} = T_{zm\xi, k}. \quad (8)$$

式中 $T_{m\zeta k}$, $T_{bm\zeta k}$, $T_{zm\zeta k}$ は変換された振動入力である。

今、同一の弾性体を n 等分した場合を考えると力のつり合式より次の差分方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \left\{ 2 - \frac{1}{3} h^2 (\xi^2 - p^2 \rho / \mu) \right\} \Delta^2 A_{m\zeta, k-1} - 2 h^2 (\xi^2 - p^2 \rho / \mu) A_{m\zeta, k} &= -h / \mu \cdot T_{m\zeta k} \\ \left\{ 2 - \frac{1}{3} h^2 (\alpha \xi^2 - p^2 \rho / \mu) \right\} \Delta^2 B_{m\zeta, k-1} - 2 h^2 (\alpha \xi^2 - p^2 \rho / \mu) B_{m\zeta, k} - (\alpha - 1) h \xi \Delta W_{m\zeta, k-1} &= -\frac{h}{\mu} T_{bm\zeta k} \\ (\alpha - 1) h \xi \Delta B_{m\zeta, k-1} + \left\{ 2\alpha - \frac{1}{3} h^2 (\xi^2 - p^2 \rho / \mu) \right\} \Delta^2 W_{m\zeta, k-1} - 2 h^2 (\xi^2 - p^2 \rho / \mu) W_{m\zeta, k} &= -2 \frac{h}{\mu} T_{zm\zeta k} \end{aligned} \right\} (9)_{1,2,3}$$

$$\Delta^2 f_{k-1} = f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}, \quad \Delta f_{k-1} = f_{k+1} - f_{k-1}, \quad h: 1 \text{ 層の厚さ.}$$

4. 厳密解との比較

厳密解と比較するために、図-2に示すような、 C を厚さ、 $z=0$, C の面で、 $U=V=U_z=0$ なる境界条件をもった弾性体を考える。この弾性体の厚さの中央 ($z=C/2$) に水平振動入力 $H e^{i\omega t}$ が半径 a の円内に作用する場合を考える。弾性体を n 等分 ($k=n/2$ に振動入力がある) ので荷重項は

$$T_{m\zeta k} = -T_{bm\zeta k} = \begin{cases} 2H J_1(\xi r_a) / (r_a \xi), & K=n/2, \quad T_{zm\zeta k}=0. \\ 0, & K \neq n/2 \end{cases} \quad (10)$$

応答として $r < r_a$ での平均値を取るものとする。式(9)をフーリエ変換と変換²⁾を利用して解き逆変換を行なうと、水平変位の平均応答は次式で表わされる。

$$U_a = \frac{1}{\pi r_a} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} (U \cos \theta - v \sin \theta) r dr d\theta = \frac{1}{\pi r_a} \int_0^\infty (A_{m\zeta} - B_{m\zeta}) J_1(\xi r_a) d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi n} \frac{H}{M} \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{6}{2h(6-D_j)} \int_0^\infty \frac{1}{s^2 - b_{1j}} - \frac{s^2 - b_{2j}}{(s^2 - X_{1j})(s^2 - X_{2j})} \right] \frac{1}{s} J_1(s) ds \{1 - (-1)^j\} \quad (11)$$

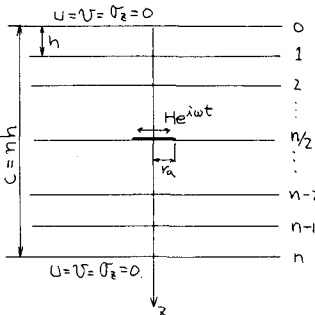


図-2. 多層体。

上式中 $s = \xi r_a$, $b_{1j} = a_0^2 - r_a^2 D_j / \{h^2(1-D_j/6)\}$, $b_{2j} = b_{1j} / \alpha$, $b_{3j} = a_0^2 - \alpha r_a^2 D_j / \{h^2(1-D_j/6)\}$
 $X_{1j} + X_{2j} = b_{2j} + b_{3j} + \{ \sin \frac{\pi}{n} \cdot (1-\alpha) / (1-D_j/6) \}^2 / \alpha$, $X_{1j} \cdot X_{2j} = b_{2j} \cdot b_{3j}$, $D_j = 2(1 - \cos \frac{2\pi j}{n})$
 $a_0^2 = r_a^2 p^2 \sqrt{\rho / \mu}$

式(11)の $\{ \}$ 内の第1項の積分は、 Y を第2種、 I, K を変形第1, 2種のBessel関数として次式となる。

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^2 - b_{1j}} \frac{1}{s} J_1(s) ds = \begin{cases} -\frac{1}{b_{1j}} \left[\frac{1}{2} - I_1(\sqrt{-b_{1j}}) \cdot K_1(\sqrt{-b_{1j}}) \right], & b_{1j} < 0 \\ -\frac{1}{b_{1j}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} J_1(\sqrt{b_{1j}}) \{ Y_1(\sqrt{b_{1j}}) - i J_1(\sqrt{b_{1j}}) \} \right], & b_{1j} > 0 \end{cases} \quad (12)$$

式(12)より $b_{1j} > 0$, 即ち $P > P_j = \frac{1}{h} \sqrt{M/p \cdot D_j / (1-D_j/6)}$ で虚数の項が発生し位相差の生じる事がわかる。 $P = P_j$ は共振点で S 波に対応する。同様に第2項からは $P = P_j$ の他 P 波に対応する $P = P_j = \frac{1}{h} \sqrt{(2\mu + \lambda) \rho \cdot D_j / (1-D_j/6)}$ がわかる。

式(11)は $n \rightarrow \infty$ となると厳密解に一致する。このときの共振点は、 S 波に対応するものが $\pi C \sqrt{M/p}$, P 波に対応するものが $\pi C \sqrt{(2\mu + \lambda) \rho}$ となる。共振点の厳密解に対する有限平板法による値の比 (P_d/P_e) は1次のモードでは分割数 $n=2$ で $P_d/P_e = 1.1027$, $n=4$ では $P_d/P_e = 1.025$ となる。有限平板法(式(11))による応答と厳密解によるものを図-3に示す。図には $C/r_a = 2.0$, $\nu = 0.0$ で、分割数 $n=4$ の場合を実線で、厳密解によるものを点線で、それらの応答の絶対値 $|U_a|$, 位相差 $\arg U_a$ を示したが、この程度の分割数でも振動数の小さい範囲ではよく近似していることがわかる。

参考文献 1). 吉田, 能町: 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, P137, 1980

2). S.G.Nomachi, K.G.Matsuoka: Proc. of 20th Japan National Congress for Applied Mechanics 1970. p117.

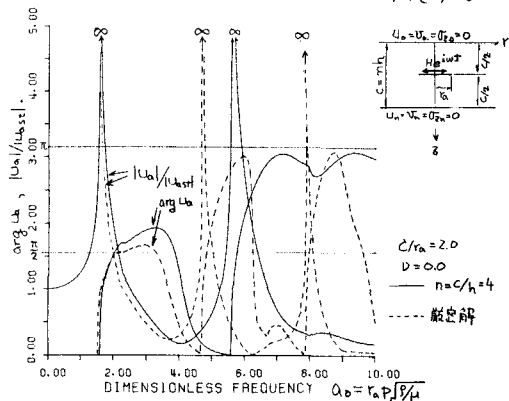


図-3. 計算例。