

## 1. はじめに

曲げの場合<sup>1,2)</sup>と同様に、変断面棒の縦振動の固有値を縦波の位相速度曲線を用いて求めた。位相速度曲線は、初等理論。これを用いた。また、微分方程式から出発して数値的に解くもう1つの方法<sup>3)</sup>でも計算を行った。前者をラグランジュ法、後者を数値積分法と呼ぶことにする。しかし、理論的にも求まるので、厳密解により、両計算結果の検証を行い、ラグランジュ法と同時に数値積分法の妥当性を調べた。

## 2. ラグランジュ法の概要

曲げの場合と同様に、境界条件を満足する関数族 $\{X_s\}$ から

$$\left. \begin{aligned} brs &= \int_0^L \rho A X_r X_s dz \\ Krs &= \int_0^L EA \frac{dX_r}{dz} \frac{dX_s}{dz} dz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を作れば、振動数方程式は

$$\det |A_{rs}| = 0 \quad (2)$$

ここで

$$A_{rs} = -p^2 brs + Krs \quad (3)$$

$$X_s = C_{1s} \sin \delta_0 z + C_{2s} \cos \delta_0 z \quad (4)$$

$\rho$ : 密度,  $A$ : 断面積,  $E$ : ヤング率,  $z$ : 軸方向座標,  $L$ : 部材長,

$p$ : 角振動数,  $C_{1s}, C_{2s}$ : 定数

## 3. 数値積分法の概要

一般性を失わずに  $0 \leq z \leq 1$  と考える。

偏微分方程式において、縦方向変位  $u$  を  $u = X \exp(ipt)$  とおき無次元化すると

$$\frac{d}{d\alpha} \left( (1-\alpha) \frac{dX}{d\alpha} \right) + \lambda (1-\alpha) X = 0 \quad (5)$$

ここで  $C = (b_0 - b_1)/b_0$ ,  $\alpha = z/l$ ,  $\lambda = \rho p^2 l^2 / E$ ,

$b_0, b_1, l$  は図2, 3に示す量である。

よって、関数  $I(\lambda)$  は  $J(\lambda)$  を導入する。

$$I(\lambda) = \frac{\int_0^1 (1-\alpha) \left( \frac{dX}{d\alpha} \right)^2 d\alpha}{\int_0^1 (1-\alpha) X^2 d\alpha}, \quad J(\lambda) = \frac{\lambda^2}{I(\lambda)} \quad (6)$$

$\alpha = 0$  とき  $X = 0$ ,  $\alpha = 1$  とき  $\frac{dX}{d\alpha} = 0$  の場合  $I(\lambda) = \lambda$ ,  $\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = 0$

$\alpha = 0$  とき  $X = 0$ ,  $\alpha = 1$  とき  $X = 0$  の場合  $J(\lambda) = \lambda$ ,  $\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda} = 0$

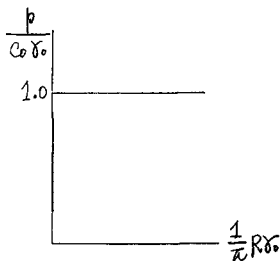


図1. 縦波の位相速度曲線  
( $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ ,  $R$ : 回転半径)

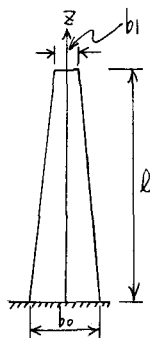


図2. 一端固定, 他端自由

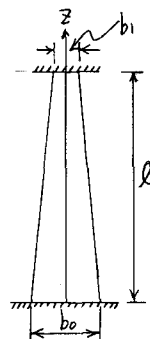


図3. 両端固定

#### 4. 理論

(i)  $0 < c < 1$  の場合

式(5)より

$$X = E J_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}(1-cx)\right) + F Y_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}(1-cx)\right) \quad (7)$$

ここで  $J_0$  は 0 次の第 1 種ベッセル関数,  $Y_0$  は 0 次の第 2 種ベッセル関数,  $E, F$  は定数である。

$x=0$  かつ  $X=0$ ,  $x=1$  かつ  $\frac{dX}{dx}=0$  の場合、振動数方程式は

$$J_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}\right) \cdot Y_1\left(\frac{1-c}{c}\sqrt{x}\right) - Y_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}\right) \cdot J_1\left(\frac{1-c}{c}\sqrt{x}\right) = 0 \quad (8)$$

ここで  $J_1$  は 1 次の第 1 種ベッセル関数,  $Y_1$  は 1 次の第 2 種ベッセル関数である。

また、 $x=0$  かつ  $X=0$ ,  $x=1$  かつ  $X=0$  の場合、振動数方程式は、

$$J_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}\right) \cdot Y_0\left(\frac{1-c}{c}\sqrt{x}\right) - Y_0\left(\frac{\sqrt{x}}{c}\right) \cdot J_0\left(\frac{1-c}{c}\sqrt{x}\right) = 0 \quad (9)$$

(ii)  $c=1$  の場合

$x=0$  かつ  $X=0$ ,  $x=1$  かつ  $\frac{dX}{dx}=0$  を満足する解は

$$X = G J_0(\sqrt{x}(1-cx)) \quad (10)$$

振動数方程式は

$$J_0(\sqrt{x}) = 0 \quad (11)$$

#### 5. 計算モデル 及び 計算結果

計算モデルは、図 2, 3 に示す通りである。

理論、ラグランジュ法、数値積分法は、すべて一致した。表 1, 2 に示す。

| $\sqrt{x} \backslash c$ | 0.1     | 0.3     | 0.5     | 0.7     | 1.0     |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1st                     | 1.6045  | 1.6856  | 1.7740  | 1.8499  | 2.4048  |
| 2nd                     | 4.7239  | 4.7539  | 4.8021  | 4.8557  | 5.5201  |
| 3rd                     | 7.8608  | 7.8791  | 7.9090  | 7.9711  | 8.6537  |
| 4th                     | 11.0005 | 11.0136 | 11.0351 | 11.0810 | 11.7915 |
| 5th                     | 14.1410 | 14.1512 | 14.1680 | 14.2042 | 14.9309 |

表 1. 一端固定、他端自由の固有値

| $\sqrt{x} \backslash c$ | 0.1     | 0.3     | 0.5     | 0.7     |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| 1st                     | 3.1412  | 3.1366  | 3.1230  | 3.0887  |
| 2nd                     | 6.2830  | 6.2806  | 6.2734  | 6.2530  |
| 3rd                     | 9.4246  | 9.4231  | 9.4182  | 9.4039  |
| 4th                     | 12.5663 | 12.5657 | 12.5614 | 12.5505 |
| 5th                     | 15.7079 | 15.7069 | 15.7040 | 15.6852 |

表 2. 両端固定の固有値

ただし 表 1 に おける  $c=1.0$  の数値は、理論とラグランジュ法とによる数値である。

#### 6. おわりに

曲げと同様に縦の場合も、位相速度曲線に基づいて求めることができた。

参考文献 1) 篠山, 長谷川: 第 33 回 年次学術講演会講演概要集 1, 502-503

2) 篠山, 長谷川: 55 年度東北卸技術研究発表会講演概要, 44

3) H. TAKEYAMA: Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. XXIX, No. 1, 1964, 109-122