I-201　ARMAモデルによる多次元非定常確率過程のシミュレーション

武蔵工業大学工学部　正員　○千葉利晃
武蔵工業大学大学院　　　　池田雅己

1. まえがき　時間領域モデルによる多次元非定常確率過程のシミュレーションについては，先に土木学会論文報告集[1)]で報告した。しかし，自己回帰移動平均(ARMA)モデルについては，モデルを与えたのみであった。そこで今回は，このARMAモデルによる多次元非定常確率過程のシミュレーション法について報告し，模擬地震波作成への応用について若干の考察を加える。

2. 自己回帰移動平均(ARMA)モデル　平均値ゼロのm次元非定常確率過程 $x_i(t)$; $i=1,2,\cdots,m$ に対するARMAモデルを文献(1)に示した様に次式で定義する。

$$x_i(j)=\sum_{p=1}^{i}\sum_{k=1}^{M(j)} b_{ip}(k,j)\,x_p(j-k)+\sum_{p=1}^{i}\sum_{k'=0}^{L(j)} h_{ip}(k',j)\,a_p(j-k')+\varepsilon_i(j) \quad ; i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

ここで $a_p(\ )$ は互いに独立な平均値ゼロ，分散 σ^2 の確率変数であり，$\varepsilon_i(j)$ は誤差を表わす。係数 $b_{ip}(k,j)$ および $h_{ip}(k',j)$ は文献1と同様に2乗平均誤差 $\sum_{i=1}^{m}E[\varepsilon_i^2(j)]$ を最小にするように決定する。ここで，時間 $j\Delta t$ の近傍 $(j-N')\Delta t \sim (j+N')\Delta t$ では定常ガウス過程と仮定し，相互相関々数を次式のように近似する。

$$E[x_n(j)x_q(j-l)]\cong\frac{1}{2N'}\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_n(s)x_q(s-l) \quad (l=1,2,\cdots,M(j)) \ , \quad E[x_n(j)a_q(j-l')]\cong\frac{1}{2N'}\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_n(s)a_q(s-l') \quad (l'=1,2,\cdots,L(j)) \ , \text{etc.} \tag{2}$$

また $a_p(j)$ と $a_q(u)$ は $p\neq q$ で互いに独立であるから

$$\sum_{s=j-N'}^{j+N'}a_p(s-k)\,a_q(s-l)=\begin{cases}2N'\sigma^2 & ; p=q\\ 0 & ; p\neq q\end{cases} \tag{3}$$

以上の(2)，(3)式を用い，まず j を固定して(1)式に最小2乗法を適用する。すなわち $\partial\sum_{i=1}^{m}E[\varepsilon_i^2(j)]/\partial b_{nq}(l,j)=0$ および $\partial\sum_{i=1}^{m}E[\varepsilon_i^2(j)]/\partial h_{nq}(l',j)=0$ とおけば次の2式が得られる。

$$\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_n(s)x_q(s-l)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{M(j)}b_{np}(k,j)\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_p(s-k)x_q(s-l)+\sum_{p=1}^{n}\sum_{k'=0}^{L(j)}h_{np}(k',j)\sum_{s=j-N'}^{j+N'}a_p(s-k')x_q(s-l) \tag{4}$$
$$n=1,2,\cdots,m \ , \quad q=1,2,\cdots,n \ , \quad l=1,2,\cdots,M(j)$$

$$\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_n(s)a_q(s-l')=\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{M(j)}b_{np}(k,j)\sum_{s=j-N'}^{j+N'}x_p(s-k)a_q(s-l')+2N'\sigma^2\sum_{k'=0}^{L(j)}h_{nq}(k',j) \tag{5}$$
$$n=1,2,\cdots,m \ , \quad q=1,2,\cdots,n \ , \quad l'=1,2,\cdots,L(j)$$

上の連立方程式を解くことにより，係数 $b_{ip}(k,j)$ および $h_{ip}(k',j)$ は次の(6)，(7)式より求めることができる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{n1}(j)\\ \mathbb{B}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{B}_{nn}(j)\end{bmatrix}=\mathbb{Z}^{-1}(j)\begin{bmatrix}\mathbb{F}_{n1}(j)\\ \mathbb{F}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{F}_{nn}(j)\end{bmatrix}-\frac{\mathbb{Z}^{-1}(j)}{2N'\sigma^2}\begin{bmatrix}\mathbb{Y}_{11}(j) & \mathbb{Y}_{21}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n1}(j)\\ \mathbb{Y}_{12}(j) & \mathbb{Y}_{22}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n2}(j)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbb{Y}_{1n}(j) & \mathbb{Y}_{2n}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{nn}(j)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{G}_{n1}(j)\\ \mathbb{G}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{G}_{nn}(j)\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbb{H}_{n1}(j)\\ \mathbb{H}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{H}_{nn}(j)\end{bmatrix}=\frac{1}{2N'\sigma^2}\left\{\begin{bmatrix}\mathbb{G}_{n1}(j)\\ \mathbb{G}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{G}_{nn}(j)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbb{Y}_{11}(j) & \mathbb{Y}_{21}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n1}(j)\\ \mathbb{Y}_{12}(j) & \mathbb{Y}_{22}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n2}(j)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbb{Y}_{1n}(j) & \mathbb{Y}_{2n}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{nn}(j)\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{n1}(j)\\ \mathbb{B}_{n2}(j)\\ \vdots\\ \mathbb{B}_{nn}(j)\end{bmatrix}\right\} \tag{7}$$

ここで，

$$\mathbb{B}_{np}(j)=\begin{bmatrix}b_{np}(1,j)\\ b_{np}(2,j)\\ \vdots\\ b_{np}(M,j)\end{bmatrix} \ , \quad \mathbb{H}_{np}(j)=\begin{bmatrix}h_{np}(0,j)\\ h_{np}(1,j)\\ \vdots\\ h_{np}(L,j)\end{bmatrix} \ , \quad \mathbb{F}_{nq}(j)=\sum_{s=j-N'}^{j+N'}\begin{bmatrix}x_n(s)x_q(s-1)\\ x_n(s)x_q(s-2)\\ \vdots\\ x_n(s)x_q(s-M)\end{bmatrix} \ , \quad \mathbb{G}_{nq}(j)=\sum_{s=j-N'}^{j+N'}\begin{bmatrix}x_n(s)a_q(s)\\ x_n(s)a_q(s-1)\\ \vdots\\ x_n(s)a_q(s-L)\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Y}_{pq}(j)=\sum_{s=j-N'}^{j+N'}\begin{bmatrix}a_p(s)x_q(s-1) & a_p(s-1)x_q(s-1) & \cdots & a_p(s-L)x_q(s-1)\\ a_p(s)x_q(s-2) & a_p(s-1)x_q(s-2) & \cdots & a_p(s-L)x_q(s-2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_p(s)x_q(s-M) & a_p(s-1)x_q(s-M) & \cdots & a_p(s-L)x_q(s-M)\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Z} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{11}(j) & \mathbb{X}_{21}(j) & \cdots & \mathbb{X}_{n1}(j) \\ \mathbb{X}_{12}(j) & \mathbb{X}_{22}(j) & \cdots & \mathbb{X}_{n2}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{X}_{1n}(j) & \mathbb{X}_{2n}(j) & \cdots & \mathbb{X}_{nn}(j) \end{bmatrix} - \frac{1}{2N'\sigma^2} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_{11}(j) & \mathbb{Y}_{21}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n1}(j) \\ \mathbb{Y}_{12}(j) & \mathbb{Y}_{22}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n2}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{Y}_{1n}(j) & \mathbb{Y}_{2n}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{nn}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_{11}(j) & \mathbb{Y}_{21}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n1}(j) \\ \mathbb{Y}_{12}(j) & \mathbb{Y}_{22}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{n2}(j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{Y}_{1n}(j) & \mathbb{Y}_{2n}(j) & \cdots & \mathbb{Y}_{nn}(j) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbb{X}_{pg}(j) = \sum_{s=j-N'}^{j+N'} \begin{bmatrix} x_p(s-1)x_g(s-1) & x_p(s-2)x_g(s-1) & \cdots & x_p(s-M)x_g(s-1) \\ x_p(s-1)x_g(s-2) & x_p(s-2)x_g(s-2) & \cdots & x_p(s-M)x_g(s-2) \\ \vdots & & & \\ x_p(s-1)x_g(s-M) & x_p(s-2)x_g(s-M) & \cdots & x_p(s-M)x_g(s-M) \end{bmatrix}$$

誤差$\varepsilon_i(j)$は文献１と同様な考えにより，$E[\varepsilon_i(j)a_g(j-l)]=0$; $l=1,2,\cdots,\infty$, $E[\varepsilon_i(j)x_g(j-l)]=0$; $l=1,2,\cdots,\infty$ $E[\varepsilon_i(j)\varepsilon_g(j-v)]=0$: $v=1,2,\cdots,\infty$ である。したがって，$\varepsilon_i(j)$ の相互相関マトリックス $\sigma^2(j)$ を作り，これを(9)式に示すように三角マトリックスの積の形に変換すれば，誤差 $\varepsilon_i(j)$ は次式によって表わされる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(j) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(j) \\ \varepsilon_2(j) \\ \vdots \\ \varepsilon_m(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(j) & & & 0 \\ C_{21}(j) & C_{22}(j) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{m1}(j) & C_{m2}(j) & \cdots & C_{mm}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

；ξ_i は平均値ゼロ，分散１の確率変数である。

ここで，
$$\sigma^2(j) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(j) & \sigma_{12}^2(j) & \cdots & \sigma_{1m}^2(j) \\ \sigma_{21}^2(j) & \sigma_{22}^2(j) & \cdots & \sigma_{2m}^2(j) \\ \vdots & & & \\ \sigma_{m1}^2(j) & \sigma_{m2}^2(j) & \cdots & \sigma_{mm}^2(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(j) & & & 0 \\ C_{21}(j) & C_{22}(j) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{m1}(j) & C_{m2}(j) & \cdots & C_{mm}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(j) & C_{21}(j) & \cdots & C_{m1}(j) \\ & C_{22}(j) & \cdots & C_{m2}(j) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & C_{mm}(j) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\sigma_{ig}^2(j) = E[\varepsilon_i(j)\varepsilon_g(j)] \cong \frac{1}{2N'}\sum_{s=j-N'}^{j+N'} \varepsilon_i(s)\varepsilon_g(s) = \frac{1}{2N'}\sum_{s=j-N'}^{j+N'} \Big\{ x_i(s) - \sum_{p=1}^{i}\sum_{k=1}^{M(j)} b_{ip}(k,s)x_p(s-k)$$
$$- \sum_{p=1}^{i}\sum_{k'=0}^{L(j)} h_{ip}(k',s)a_p(s-k')\Big\}\cdot\Big\{x_g(s) - \sum_{p=1}^{g}\sum_{k=1}^{M(j)} b_{gp}(k,s)x_p(s-k) - \sum_{p=1}^{g}\sum_{k'=0}^{L(j)} h_{gp}(k',s)a_p(s-k')\Big\}$$
$$i=1,2,\cdots,m \quad , \quad g=1,2,\cdots,i$$

3．模擬地震波作成への応用　実地震データに応用する場合には，ある中心時刻$j\Delta t$の前後$2N'\Delta t$秒の区間を定常とみなして，(6)〜(8)式より時刻$j\Delta t$での係数$b_{ip}(k,j)$，$h_{ip}(k',j)$および誤差$\varepsilon_i(j)$を求める。次に順次jを移動（文献１に示したように，このjの移動はΔtよりかなり大きくてもよい）させて，実地震データの全区間において係数および誤差$\varepsilon_i(j)$を求めれば，当該実地震波の特性を持つ非定常多次元の模擬地震波を作成することができる。一般の場合には，(1)式の係数$b_{ip}(k,j)$と$h_{ip}(k',j)$をモデル化する必要がある。この方法として，例えば地盤を減衰β，固有円振動数ω_0を持つ１自由度系としてモデル化し，この系に White Noise $\ddot{w}(t)$が入力したときの絶対加速度応答を観測地震波と考えることもできる。この場合，１自由度系の基本運動方程式は，$\ddot{y}+2\beta\omega_0\dot{y}+\omega_0^2 y=-\ddot{w}(t)$で与えられる。これをZ変換したのち漸化式の形で整理すれば絶対加速度応答$\ddot{f}$は次のように表わされる。

$$\ddot{f}_n = 2e^{-\beta\omega_0\Delta t}\cos\omega_0\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t\,\ddot{f}_{n-1} - e^{-2\beta\omega_0\Delta t}\ddot{f}_{n-2} + 2\beta\omega_0\ddot{w}_n$$
$$- e^{-\beta\omega_0\Delta t}\Big(2\beta\omega_0\cos\omega_0\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t + \frac{2\beta^2-1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\omega_0\sin\omega_0\sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t\Big)\ddot{w}_{n-1} \tag{10}$$

(10)式は定常過程におけるARMA(2,1)過程に対応する。非定常性は，βおよびω_0を時間の関数として表わすか，あるいは，(10)式の各係数に時間の関数を乗ずることによって表わせよう。これらの係数を(1)式の係数$b_{ip}(k,j)$および$h_{ip}(k',j)$に対応させれば，非定常な模擬地震波の作成ができる。以上は１次元の問題であるが，多次元の場合にも，計算は複雑となるが同様の考え方が適用できよう。別の方法として，周波数領域モデルにおけるスペクトルのモデル化のように，統計的に係数をモデル化することも可能であろう。このように，地盤をモデル化（１自由度系に限らない）して，(1)式の係数をモデル化するか，あるいは，統計的に係数をモデル化するかは別にして，係数を何らかの方法でモデル化すれば非定常な模擬地震波の作成が可能となる。

参考文献　(1) 星谷，千葉，土木学会論文報告集 No. 296，April 1980，pp. 121〜130