

長崎県庁 正員 村中幸治
長崎大学工学部 正員 高橋和雄
長崎大学工学部 永田正美

1. 緒言 ケーブルの幾何学的非線形問題の運動方程式は面内変位と面外変位とが連成する三次元運動方程式で与えられる¹⁾。このために、ケーブルの非線形振動の特徴として面内と面外の非線形連成振動が生ずることが予想される²⁾。そこで本研究はケーブルの三次元非線形運動方程式を面内非線形振動を取り扱った方法を用いて解析し、面内加振および面外加振による非線形連成応答を明らかにしたものである。

2. 運動方程式及び応答の分類 ケーブルの三次元非線形運動方程式は次のように与えられる。

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(c_0 \frac{1}{x_0} + c_1 x_0' \right) \frac{\partial u}{\partial s} + c_1 x_0' y_0' \frac{\partial v}{\partial s} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(x_0' \frac{\partial u}{\partial s} + y_0' \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} \left(x_0' + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} - \frac{P_0 \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(c_0 \frac{1}{x_0} + c_1 x_0' \right) \frac{\partial v}{\partial s} + c_1 x_0' y_0' \frac{\partial u}{\partial s} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(x_0' \frac{\partial u}{\partial s} + y_0' \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} \left(y_0' + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} - \frac{P_0 \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(c_0 \frac{1}{x_0} + c_1 x_0' \right) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} - c_1^2 \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(x_0' \frac{\partial u}{\partial s} + y_0' \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{P_0 \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (3)$$

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平、鉛直変位、 w : 面外変位、 s : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 t : 時間、 $\{x_0, y_0, 0\}$: ケーブルの初期形状、 c_0, c_1 : ケーブルの横波、縦波伝播速度、 P_0, ρ_0 : 荷重強度

面内加振と面外加振の場合について非線形応答の分類を示せば図-1のとおりである。面内加振の場合には面外変位は直接加振されずに、面内非線形応答のみが生ずる。しかし、面外の運動方程式(3)の面外変位の係数に面内変位 u, v が含まれるために、面外の運動方程式は係数振形の微分方程式となり、面外非線形分岐応答が生ずる。これに対して面外加振の場合には面内の運動方程式の非線形項に $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$ および $\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2$ の面外変位に独立な項が含まれるから、これらの項が付加荷重として面内の運動方程式に作用する。したがって面外加振によって面内、面外非線形連成応答がえられる。

3. 面外加振による面内、面外非線形連成応答

図-2および3はケーブルの面内、面外の自由度をそれぞれ2個採用した場合のサグ比 $\gamma=0.1$ および0.026の等分布荷重による面内、面外非線形連成応答を示すものである。図中において、細い方の実線は荷重と同位相の面外応答を、点線は逆位相の面外応答をそれぞれ示すもので、肉太の実線と点線は面内応答に対応するものである。ケーブルは面外方

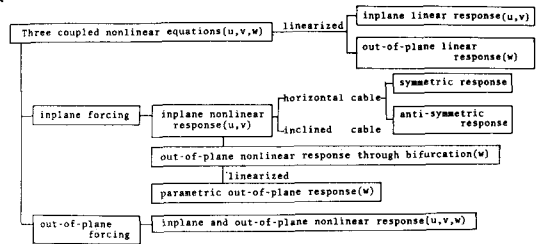


図-1

Classification of responses of cables

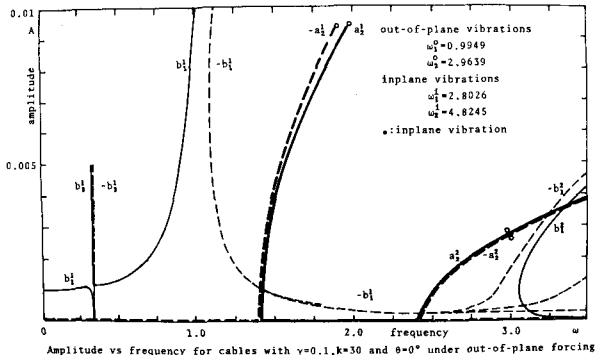


図-2

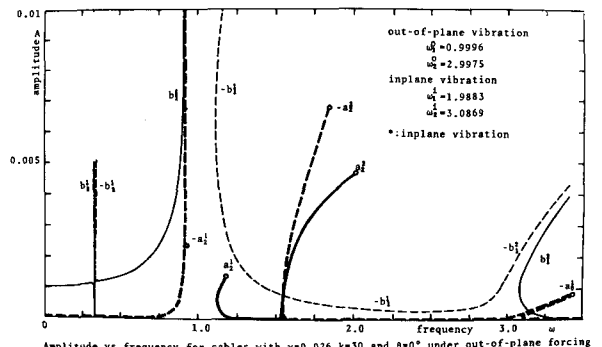


図-3

向にサグをもたないので、面外の運動方程式には w に関する2次の項は含まれない。したがって、面外応答はケーブル面をばさんで対称となり、荷重と同周期の主共振と3倍の高調波共振が生ずる($b_1^2=0, b_1^2 \neq 0, b_2^2=0, b_2^2 \neq 0$)。一方、面内方向には $(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ の項が含まれてるので、2倍角の公式 $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$ より、静的および加振振動数の2倍の振動数を持つ動的荷重が面内方向に作用する。したがって、面内応答は静的応答と2倍の高調波応答からなる($\alpha_1^2 \neq 0, \alpha_1^2=0, \alpha_2^2 \neq 0, \alpha_2^2=0$)。図-2,3より面外応答は $\omega=1.0$ および3.0付近で生じ、面外一次の応答は弱い硬化バネ特性を持つ。一方、面内方向には面外対称振動によって面内対称振動のみが加振され、面内応答は常に生ずるが、共振点近傍を除いては応答はきわめて小さい。サグ比 $\gamma=0.026$ の場合には、面内対称1次振動の固有振動数が面外対称1次振動の2倍であるために、面外振動によって面内1次振動数の近傍に大きな加振力が作用する。このために、面内1次振動の共振が生ずる振動数領域は広く、大きな振幅となっている。また、 $\omega=3.0$ 付近では面内1次振動形をもった静的応答が生じている。 $\gamma=0.1$ と0.026の代表的な点の非線形応答のリサーチ図を示せば、図-4,5のとおりである。

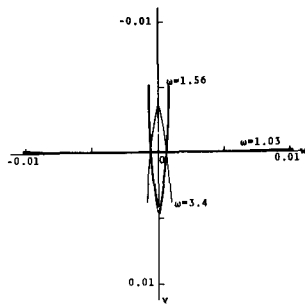


Figure 4: Lissajous figure at the center of cable with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

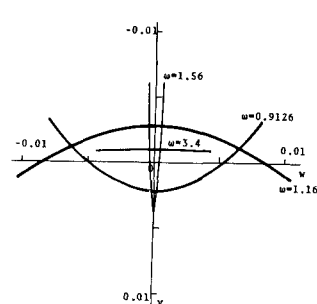


Figure 5: Lissajous figure at the center of cable with $\gamma=0.026, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under out-of-plane forcing

図-4

図-5

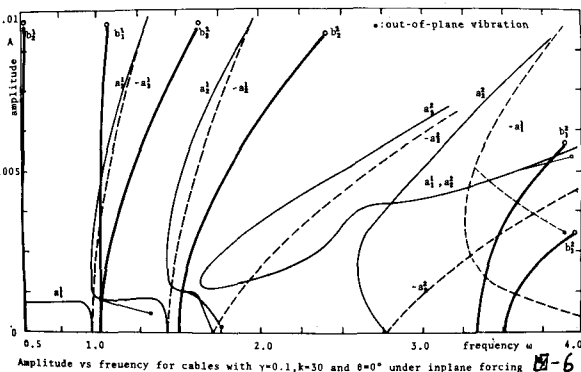


Figure 6: Amplitude vs frequency for cables with $\gamma=0.1, k=30$ and $\theta=0^\circ$ under inplane forcing

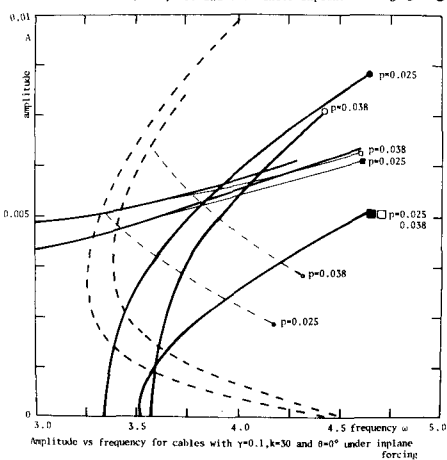


図-7

4. 面内加振による面外非線形分岐応答

図-6はサグ比 $\gamma=0.1$ の場合の面内対称加振による面内非線形応答と面外非線形分岐応答を示したものである。図中において○印を付した肉太の曲線が面外非線形分岐応答で、また、○印の付した細い曲線が面外非線形分岐応答に伴う面内非線形応答である。○印のない応答曲線は通常の面内非線形応答である。面外非線形分岐応答は特定の振動数領域でのみ存在し、面外1次および2次の固有振動数の1, $\frac{1}{2}$ および $\frac{1}{3}$ 付近で生ずる。ただし、振動数 ω

$=3.0$ 付近で分岐するはずの2次振動の分岐応答は $\omega=3.3$ および3.5付近で生じている。図-7はこれらの振動数領域で荷重強度を変化させた場合の面外非線形分岐応答を示すものであるが、面内応答の振幅によって面外振動が生ずる分岐点は変化している。これより、面内応答が大きい振動数領域では面外の剛性が面内変位によって増加するために、 $\omega=3.0$ より高い振動数で面外非線形応答が分岐することになる。なお面外分岐応答と面内応答の間の位相は 0 または 180° である。また、面外非線形分岐応答が生ずると、面内応答の振幅は通常の面内応答の場合よりも小さくなる。この原因は面内振動のエネルギーが面外振動のエネルギーに移ることによるものと考えられる。以上の解法によって面外非線形分岐応答が生ずる分岐点と分岐後の応答を明らかにすることができ、

参考文献 1) 山口、伊藤：土木学会論文報告集、第286号、1979、2) 山口、宮田、伊藤：土木学会第35回年次学術講演会論文集 第1部 1-175、1980