

山口大学 正員 倉田 忠義

" 学生員 小松 茂生

まえがき 走行列車の蛇行動・ヨーイングにともなうレールに作用する横荷重は比較的大きく、設計に当っては、旅客車・高速貨車・電気機関車・ディーゼル機関車などは1台車当りの車両重量の15%、一般貨車などは25%の横力がレール面に橋軸に直角方向に作用するものと示されている。これらの横荷重はレール面に水平に作用することから梁のねじりにともなうその作用方向が一部回転する従動力になることが予想される。この他、従動力の横荷重としては、磁気浮上式鉄道車両のヨーイングにともなう横荷重が考えられる。本研究は周期性従動力荷重が水平に作用し、かつ、橋軸方向に移動する場合を想定し梁の動的挙動を明らかにしようとするもので、荷重は連行するとし、運動方程式を求めた。振動方程式はHill型方程式となり、不安定振動の生ずることが明らかになった。振動が不安定となる境界における振動数方程式をBolotinの方法によって求めた。

運動方程式 Fig. 2に示す δ_x が梁のねじり θ によってその作用方向が変化するとき、 δ_x の他に y 方向に $\delta_x \theta$ なる荷重も生ずる。このとき、運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{U}_s + y_s \ddot{\theta}) + EI_{xx} U_s^{(m)} - \delta_x &= 0 \\ m(\ddot{V}_s - x_s \ddot{\theta}) + EI_{yy} V_s^{(m)} - \delta_x \theta &= 0 \\ \mu I_{\rho} \ddot{\theta} + m(y_s \ddot{U}_s - x_s \ddot{V}_s) + EI_{\omega} \ddot{\theta} - GK\theta \\ - \delta_x \theta (e_x - x_s) + \delta_x (e_y - y_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 m : 梁の単位長さ質量、 μI_{ρ} : 慣性モーメント、 EI_{xx} および EI_{yy} : 曲げ剛性、 EI_{ω} : 曲げねじり剛性、 GK : ねじり剛性、 $(\cdot) = \partial/\partial t$ $(\cdot)' = \partial/\partial x$ 、 δ_x は速度 V 、荷重間隔 a の連行集中荷重 $P \cos \omega t$ (ω : 荷重振動数、 t : 時刻) を考えるとき (Fig. 3 参照),

$$\delta_x = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(x - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_{n1} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(x - \xi(t, j)) & \dots T_{n1} \leq t < T_{n2} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(x - \xi(t, j) - a) & \dots T_{n2} \leq t < T_{n3} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(x - \xi(t, j) - a) & \dots T_{n3} \leq t < T_{n4} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta(x - \xi(t, j) - 2a) & \dots T_{n4} \leq t \leq T_p \dots (2) \end{cases}$$

式中、 δ : Dirac の δ 関数、 $\xi(t, j) = Vt + (j-1)a + a_0$ 、 $T_p = 2a/V$
 $T_{n1} = \{l - (n-1)a - a_0\}/V$ 、 $T_{n2} = (a - a_0)/V$ 、 $T_{n3} = \{l - (n-2)a - a_0\}/V$
 $T_{n4} = (2a - a_0)/V$ 、ここで、荷重振動周期 $T = 2\pi/\omega$ が荷重移動周期 $T_p = 2a/V$ の整数分の1であるとき、 $\omega = \alpha \omega_0$ α : 整数、 $\omega_0 = \pi V/a$ とする。列車蛇行動の場合は $\alpha = 1$ に対応する。

運動方程式(1)の近似解に式(2)を用いる。式中、 P_R 、 O_R および U_R は時間の未知関数、 U_{sR} および V_{sR} は梁の曲げの各次の固有関数、 θ_R はねじりの各次の固有関数で、単純梁の場合は $U_{sR} = V_{sR} = \theta_R = \sin R\pi x/l$ である。式(3)を(1)に代入整理すると、次式となる。

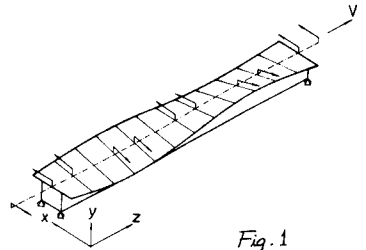


Fig. 1

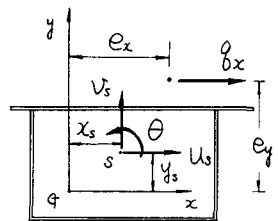


Fig. 2

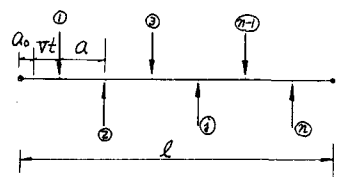


Fig. 3

$$\left. \begin{aligned} U_s &= \sum_{R=1}^{\infty} P_R(t) U_{sR}(x) \\ V_s &= \sum_{R=1}^{\infty} O_R(t) V_{sR}(x) \\ \theta &= \sum_{R=1}^{\infty} \theta_R(t) \theta_R(x) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\ddot{P}_R + y_s \ddot{\theta}_R + \omega_{UR}^2 P_R - \frac{2P}{l m} g_R(t) = 0, \quad \ddot{\theta}_R - x_s \ddot{\theta}_R + \omega_{\theta R}^2 \theta_R - \frac{2P}{l m} \sum_{i=1}^N f_{Ri}(t) \tau_i = 0$$

$$\ddot{r}_R + \frac{m}{\mu l_{ps}} (y_s \ddot{p}_R - x_s \ddot{O}_R) + \omega_{OR}^2 r_R - \frac{ZP(C_0 - y_s)}{\mu l_{ps} l} \sum_{k=1}^N f_{Rk}(t) r_i + \frac{ZP(C_0 - y_s)}{\mu l_{ps} l} g_R(t) = 0 \quad R=1, 2, \dots, N \quad (4)$$

ここで、 $\omega_{UR} = (\kappa \pi / l)^2 \sqrt{EI_{xx} / m}$, $\omega_{OR} = (\kappa \pi / l)^2 \sqrt{EI_{yy} / m}$, $\omega_{OR} = \sqrt{(\kappa \pi / l)^4 EI_0^2 + (\kappa \pi / l)^2 GK} / \mu l_{ps}$
 $f_{Rk}(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \delta x U_{OR} U_{sR} dx$, $g_R(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \delta x U_{OR} dx$... (5) である。

式(4)は3N元の連立方程式となるので、マトリックス表示すると次式となる。

$$A \ddot{\mathbf{r}} + (B + PC(t)) \dot{\mathbf{r}} + P \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (6), \quad \mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_N, O_1, \dots, O_N, r_L, \dots, r_N\}^T \quad (7)$$

A: マスマトリックス, B: 対角線に $\omega_{UR}^2, \omega_{OR}^2, \omega_{OR}^2$ などのマトリックス, C(t): 荷重の従動にともなうマトリックスで、連行荷重の場合、 $T_p = 2A/\sqrt{\dots}$ なる周期をもつ関数となる。d: 荷重項を表わす。

攪乱方程式と境界振動数方程式 連行に水平の従動横荷重を受けて定常振動(定常解を $\mathbf{r}$) (ている状態に小さい攪乱($\mathbf{r}$) を与えると、 $\mathbf{r}$ に対する攪乱方程式 $A \ddot{\mathbf{r}} + (B + PC(t)) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (8)$

が得られる。ここで、 f_{Rk} も周期 $T_p = 2A/\sqrt{\dots}$ をもつ Fourier 級数

$$f_{Rk} = \frac{1}{2} A_{0Rk} + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{pRk} \cos p \omega t + B_{pRk} \sin p \omega t) \quad (9)$$

を表わすとき、攪乱方程式(8)は次の Hill 型の方程式になる。

$$A \ddot{\mathbf{r}} + B \dot{\mathbf{r}} + P \{C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_p \cos p \omega t + C_p \sin p \omega t)\} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Hill 方程式の解について、係数 C(t) の周期と同じか、あるいは、2倍の周期をもつ同期解がバウメーヌ平面において、安定領域と不安定領域を区別する。より厳密にいうと、同じ周期をもつ2つの解が不安定領域を区別し、異なる周期をもつ解が安定領域を区別することが知られている。

C が周期 $T_p = 2A/\sqrt{\dots}$ をもつので、周期 $2T_p$ をもつ同期解 $\mathbf{r} = \sum_{s=1,3}^{\infty} (A_s \cos \frac{1}{2} s \omega t + B_s \sin \frac{1}{2} s \omega t) \quad (11)$

を式(11)で表わす。 A_s, B_s : 時間に無関係はバウメーヌ。式(11)を(10)に代入し調和バウメーヌ法を適用すると、 A_s, B_s を求めるための同次方程式が得られる。この同次方程式より A_s, B_s が存在するための条件、すなわち、境界振動数方程式(12) $|\frac{1}{4} \omega_0^2 [A]_1 + [B]_1 + \frac{1}{2} P[C]_1| = 0 \quad (12)$ が得られる。

さらに、式(10)の周期 T_p をもつ $\mathbf{r} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{s=3,5}^{\infty} (A_s \cos \frac{1}{2} s \omega t + B_s \sin \frac{1}{2} s \omega t) \quad (13)$

同期解を式(13)で表わすとき、同様にして、次の境界振動数方程式が得られる。

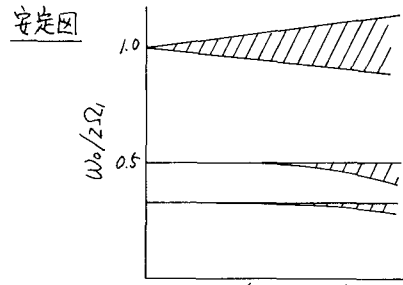
$$|\frac{1}{4} \omega_0^2 [A]_2 + [B]_2 + \frac{1}{2} P[C]_2| = 0 \quad (14)$$

式(12), (14)中の $[A]_1, [B]_1, [C]_1, [A]_2, [B]_2, [C]_2$ はそれぞれ次の内容をもつ、

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} 3A & & & \\ & 1A & & \\ & & 1A & \\ & & & 3A \end{bmatrix}, [B]_1 = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & B & \\ & & & B \end{bmatrix}, [C]_1 = \begin{bmatrix} -(2C_0 + C_{12}) & (C_{11} + C_{12}) & (C_{22} - C_{21}) & C_{23} & \dots \\ \dots & (C_{11} + C_{12}) & (2C_0 + C_{11}) & C_{21} & (C_{22} + C_{21}) \dots \\ \dots & (C_{22} - C_{21}) & C_{21} & (2C_0 - C_{11}) & (C_{11} - C_{12}) \dots \\ \dots & C_{23} & (C_{22} + C_{21}) & (C_{11} - C_{12}) & (2C_0 - C_{13}) \dots \end{bmatrix}$$

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 4A & & & \\ & 2A & & \\ & & 0 & \\ & & & 2A & \\ & & & & 4A \end{bmatrix}, [B]_2 = \begin{bmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & 0.5B & \\ & & & B \end{bmatrix}$$

$$[C]_2 = \begin{bmatrix} \dots & (2C_0 + C_{14}) & (C_{11} + C_{13}) & C_{12} & (C_{23} - C_{21}) & C_{24} & \dots \\ \dots & (C_{11} + C_{13}) & (2C_0 + C_{12}) & C_{11} & C_{22} & (C_{23} + C_{21}) \dots \\ \dots & C_{12} & C_{11} & C_0 & C_{21} & C_{22} & \dots \\ \dots & (C_{23} - C_{21}) & C_{22} & C_{21} & (2C_0 - C_{12}) & (C_{11} - C_{13}) \dots \\ \dots & C_{24} & (C_{23} + C_{21}) & C_{22} & (C_{11} - C_{13}) & (2C_0 - C_{14}) \dots \end{bmatrix}$$



1) ボーナー: 弾性系の動的安定 (近藤・中田訳)
 コロナ社, P.15, 昭和46年