

大阪大学大学院 学生員 山口博章

大阪大学工学部 正 員 小松定夫

大阪大学工学部 正 員 奈良 敬

1. まえがき 当研究室において既に、面内ひずみ一定の三角形要素を用いた有限要素法による弾塑性有限変位解析法を開発し、初期不整を有する鋼板の面内純圧縮応力および面内曲げ圧縮応力下における極限強度特性を明らかにしてきた。本研究においては、組合せ応力下における鋼板の弾塑性有限変位挙動を明らかにするために、新たに変位関数がエルミット多項式で与えられる長方形有限要素による弾塑性有限変位解析法を定式化を行った。本解析法は従来の解析法と比較して、①全要素数が減少する。非線形計算で繰り返し計算を行うので、全要素数の減少が計算時間の短縮につながる。②面内線形ひずみ要素を用いているので、高次の自由度を導入することなく面内問題の精度を上げることが出来る。③要素を解析対象物と相似にすること出来るので現象がとらえ易い、などの利点が挙げられる。今回は、本解析法の概要を述べると共に、面内純圧縮応力および面内曲げ圧縮応力状態における鋼板について行った数値計算結果について報告する。

2. 解析手法 解析対象として鋼材は、等方等質性であり、*von Mises* の降伏条件および *Prandtl-Reuss* の塑性流理論に従う完全弾塑性体であると仮定した。非線形計算にあたっては、*Newton-Raphson* 法と修正増分法を併用した反復法を用いている。変位関数はエルミット多項式を用いて次式で与えている。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 H_{0i}^{(u)}(x) \cdot H_{0j}^{(u)}(y) \cdot u_{ij} \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 [H_{0i}^{(v)}(x) \cdot H_{0j}^{(v)}(y) \cdot v_{ij} + H_{1i}^{(v)}(x) \cdot H_{0j}^{(v)}(y) \cdot v_{xij}] \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 [H_{0i}^{(w)}(x) \cdot H_{0j}^{(w)}(y) \cdot w_{ij} + H_{1i}^{(w)}(x) \cdot H_{0j}^{(w)}(y) \cdot w_{xij} \\ &\quad + H_{0i}^{(w)}(x) \cdot H_{1j}^{(w)}(y) \cdot w_{yij} + H_{1i}^{(w)}(x) \cdot H_{1j}^{(w)}(y) \cdot w_{xyij}] \end{aligned}$$

ここで、添字 i, j は図-1に示す長方形要素の節点 (i, j) を表す。鋼板全体の剛性方程式から得られる節点変位により生ずる不釣り合い力については、*Murray-Wilson* の移動座標の概念を導入し、全変位から剛体移動および回転による変位を取り除いた正味の变位から求めている。この際、反復計算による解の収束を早める為に非線形項を考慮して、不釣り合い力を算定している。要素の変形後の局所座標は次の様に決定した。図-2に示すように変形後の要素の節点 i, j, k, l で作られる四角形の各辺の中点を p, q, r, s とする。 pr と qs の交点 o を原点とし、 os 上に x 軸をとる。 os と or の両方に垂直に z 軸をとり、最後に x 軸と z 軸から y 軸を決定する。この局所座標系を全体座標系に変換するマトリックス L は、全体座標系における局所座標系の座標軸の方向余弦により与えられる。

3. 数値計算例 解析モデルは固定単純支持の正方形板とした。初期不整の導入にあたっては次の仮定を設けた。残留応力については、図-3に示すような自己平衡の分布形を与え、 x 軸方向および板厚方向で一定とする。初期に与えられた三角関数で与える。 $W_0 = W_0 \cdot \sin(\pi x/a) \cdot \sin(\pi y/a)$ ここで、 W_0 は板中央点における初期に与えられた。

(1) 純圧縮応力状態での数値計算例 解析モデルの諸元を表-1に示す。残留圧縮応力度および残留引張応力度は、 $\sigma_{rc} = -\sigma_r/3$ 、 $\sigma_{rt} = -2\sigma_{rc}$ とす

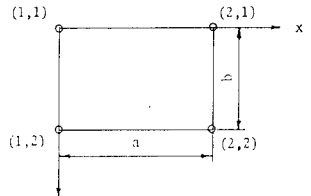


図-1 長方形要素

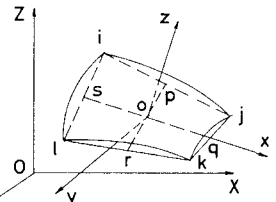


図-2 全体座標系と局所座標系

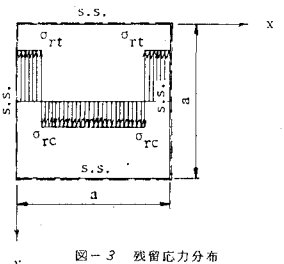


図-3 残留応力分布

表-1 解析モデルの諸元

	σ_y (kg/cm ²)	E (kg/cm ²)	ν	a, b (cm)	b/t	w_0/t
Type I	6000	2.1×10^4	0.316	48.0	48.0	0.1
Type II	2400	2.1×10^4	0.300	40.0	40.0	0.1

表-2 メッシュ分割と最大平均圧縮応力度

	N	3	4	5	6	8
Type I	$\sigma_{rc} = 0$	0.662	0.645	0.637	0.633	0.630
	$\sigma_{rc} = -\sigma_r/3$	0.612	0.598	0.561	0.556	0.552
Type II	$\sigma_{rc} = 0$	0.983	0.979	0.977	0.976	
	$\sigma_{rc} = -\sigma_r/3$	0.979	0.968	0.961	0.955	0.953

之を、メッシュ分割と最大平均圧縮応力度 ($\bar{\sigma}_{max}/\sigma_y$) の関係を表-2に示す。この表から、モデル Type I と Type II と残留応力の有無に関係なく $N=6$ で十分な精度が得られるものと思われる。次に平均圧縮応力度 ($\bar{\sigma}$) と板中央点でのたわみ (w_c) の関係はモデル Type I の場合について図-4に示す。残留応力が無い場合は弾性領域内で Coan の級数解に良く収束してゐる⁴⁾。面内ひずみ一定の三角形有限要素を用いた弾塑性有限変位解析法(以下三角形要素による解析法と呼ぶ)による結果と比較するとわずかながら差がみられる。

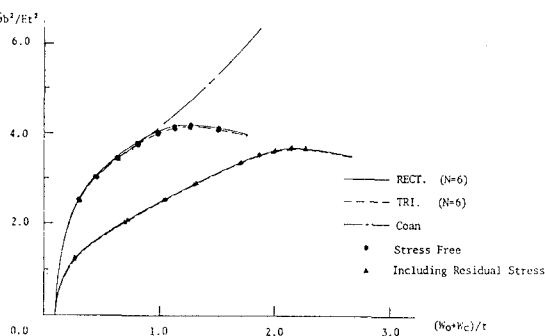


図-4 平均圧縮応力度と板中央点のたわみ

板中央面での応力度分布を図-5に示す。変位増分法を用いてゐるため反復計算の際に平衡状態に達した時の応力度に違いがあるが、三角形要素による解析法の結果とほぼ一致しているが、同じ挙動を示してゐるのに対し。

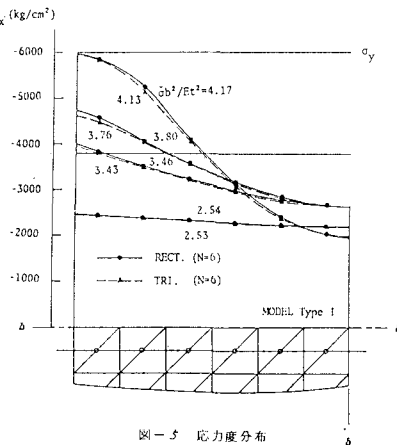


図-5 応力度分布

(2) 曲げ圧縮応力状態での数値計算例 解析モデルは同じ単純支持の正方形板に応力勾配 $\varphi = 1.0$ の曲げ圧縮応力が作用するものとする。ここで、応力勾配は、最大縁応力を σ_1 、最小縁応力を σ_2 とすると次式で与えられる。 $\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1$ 。残留応力については、 $\sigma_{rc} = -0.4 \sigma_y$ 、 $\sigma_{rc} = \sigma_y$ とした。また、粗いメッシュ分割で精度の向上をほかに為し不等分割を考えた。Type I は極限状態でのたわみ対最大大きくなる最大圧縮応力が作用する端部から $1/3$ 点付近でメッシュ分割を細くした。Type II は最大圧縮応力が作用する端部に近づくにつれてメッシュ分割を細くした。メッシュ分割と最大平均圧縮応力度 ($\bar{\sigma}_{max}/\sigma_y$) の関係を表-3に示す。この表からメッシュ分割は不等分割 Type II で 4×8 、等分割では 5×10 で十分な精度の良い結果が得られると思われる。板中央部での応力度分布を図-6に示す。極限状態で、板中央付近で応力が落ち込むという挙動を示してゐる。この挙動は三角形要素による解析法の結果でもみられる挙動であり両者が一致する。

表-3 メッシュ分割と最大平均圧縮応力度

		MESH	3×6	4×8	5×10
等分割		$\sigma_{rc} = 0$	0.566	0.552	0.546
		$\sigma_{rc} = -0.4\sigma_y$	0.593	0.579	0.574
		$\sigma_{rc} = 0$	0.581	0.550	0.544
不等分割	Type I	$\sigma_{rc} = -0.4\sigma_y$	0.596	0.582	0.576
		$\sigma_{rc} = 0$	0.565	0.548	0.543
	Type II	$\sigma_{rc} = -0.4\sigma_y$	0.595	0.574	0.569
		$\sigma_{rc} = 0$			
		$\sigma_{rc} = -0.4\sigma_y$			
		$\sigma_{rc} = 0$			

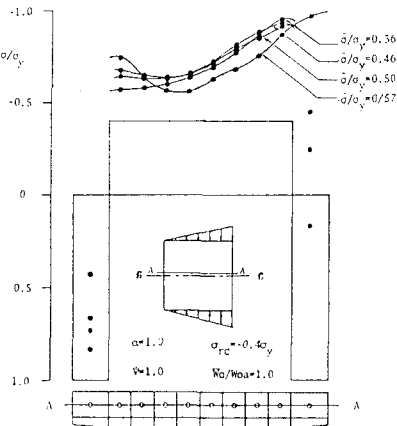


図-6 応力度分布

4. 結論 ①純圧縮応力を受ける正方形板の解析結果から i)メッシュ分割は 6×6 で十分な精度が得られる。ii)三角形要素による解析法と同じメッシュ分割で板中央点でのたわみおよび板中央断面での応力度分布の挙動が一致した。②曲げ圧縮応力を受ける正方形板の解析結果から i)メッシュ分割は等分割で 5×10 、不等分割 Type II では 4×8 で十分な精度が得られる。ii)残留応力を有する場合は、極限状態において板中央付近で膜応力が落ち込む挙動が観察された。なお、数値計算例の詳細については、講演当日に発表する予定である。

あとがき 解析プログラム作成および数値計算にあたり協力を頂いた

大阪府立大学大学院生の宇野敏雄氏(現在、日本道路公団勤務)に謝意を表します。

参考文献

- 1) 小松、北田、田嶋：残留応力および初期ひずみを持つ圧縮板の弾塑性解析、土木学会論文報告書、第244号、1975年12月、pp1-14
- 2) 小島：初期変位を有する鋼板の組合せ応力下における極限強度特性に関する研究、大阪大学修士論文、昭和55年8月
- 3) Bogen, R. K., R. L. Fox and L. A. Schmitt Jr.: The Generation of Inter-element - Compatible Stiffness and Mass Matrices by the use of Interpolation Formulas, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson AFB., Ohio 1966, pp17-443
- 4) J. M. Coan: Large-Deflection Theory for Plates With Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression. J. of Applied Mech., Vol. 18, No. 2, June, 1951