I-152　残留応力を有する柱・板の弾塑性座屈特性について

京都大学工学部　正　員　丹羽　義次
京都大学工学部　正　員　渡辺　英一
京都大学大学院　学生員　○福森　世志夫

〔1〕　はじめに

鋼構造物は圧延成型や溶接等による熱ひずみの為に必ず残留応力を持ち，破壊現象が弾塑性域に多く見られることと考え合せれば，破壊に対して残留応力の与える影響は一般に小さくないと思われる。本研究は残留応力の存在する系の簡単なモデルを用いて弾塑性域の座屈曲線を求め，更に初期不整に対する敏感性を論じるものである。ところで，構造物が塑性域に入ると保存系ではなくなるが，カタストロフィー理論で不安定現象を論じるため系のポテンシャルを考える必要がある。そこで，塑性域に塑性変形理論による構成関係式を用いた準弾性的な増分計算を行い，非線形弾性問題としてポテンシャルを求め，カタストロフィー理論により次の結論を得た。

1)　柱・板の弾塑性座屈は非対称座屈，換言すれば Fold Catastrophe である。

又，板の耐荷力に対して，

2)　板の耐荷力曲線は離散化法及びモード解析法を用いてカタストロフィー分岐集合として求められ得る。

〔2〕　解析法

1)　柱　　I型断面鋼が溶接のためフランジ中央線に沿って引張応力のピークをもつ放物線分布の残留応力をもつ系を考える。この柱に圧縮力を加えると，断面端から局部塑性が起こり，載荷に従って塑性域が内部に進行する弾塑性問題となる。Fig. 1 の断面応力状態において弾性部を有効断面係数 k で表すと，この断面での平均応力 $\bar{\sigma}$，中央のひずみ $\bar{\varepsilon}$，平均弾性係数 E_t は，

$$\bar{\sigma}=(1-k^3\bar{\sigma}_r)\sigma_y$$
$$\bar{\varepsilon}=\left\{1+\tfrac{1}{2}(1-3k^2)\bar{\sigma}_r\right\}\frac{\sigma_y}{E}$$
$$E_t=kE \qquad \cdots(1)$$

ここに，σ_y：降伏応力

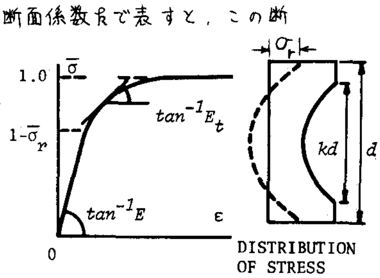

Fig. 1　弾塑性構成関係

E：ヤング率，σ_r：残留応力，$\bar{\sigma}_r\equiv\sigma_r/\sigma_y$

この3者の関係を Fig. 1 に示す。次に，1自由度系モデルにおける座屈後の弾塑性釣合式は Fig. 2 の様にポテンシャルを V，たわみ角を θ として，

$$V'=4K^e f\theta-Pl\theta \cdots(2)$$

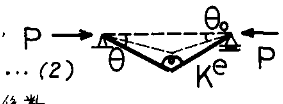

Fig. 2　1自由度モデル

ここに，f：弾塑性剛性係数
K^e：弾性のバネ定数
P：圧縮力，l：柱モデルの長さ

ところで，座屈直後のひずみ挙動に *Shanley* 効果を考慮すると，f の θ に関する微係数が存在し，

$$V''=4K^e f-Pl+4K^e f'\theta$$
$$V'''=8K^e f'+4K^e f''\theta \qquad \cdots(3)$$

ここに，「′」は θ に関する微分を示す。

つまり，臨界点 $\theta=0$ において $V'''|_{\theta=0}\neq 0$，即ち，柱の弾塑性座屈は弱軸回りに関して，非対称座屈であり，Fold Catastrophe である。次に初期不整のある系の耐荷力 P_u は，弾塑性座屈荷重 P_{cr} を基準としてカタストロフィー理論の $\frac{1}{2}$ 剰則を用いて，

$$\hat{P}_u=1-\sqrt{\alpha\theta_0} \qquad \cdots(4)$$

$$\hat{P}_u=P_u/P_{cr} \qquad \alpha=-(f'_{cr}/f_{cr})\dot{k} \quad \left\langle{}'\equiv\frac{\partial}{\partial k};\ \dot{}\equiv\frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle$$

P_{cr}：弾塑性座屈荷重　θ_0：初期不整パラメータ

又，非線形解析の近似解として断面の縁応力が降伏応力に達する時，$\theta=\theta_Y^*$ としてこの点に関するテイラー展開を用いて耐荷力を決定することができる：

$$\left.\begin{aligned}\hat{P}_u&=1+\alpha(1+\gamma^*)\theta_0-2\sqrt{\alpha\theta_0(1+\alpha\gamma^*\theta_0)}\\ \alpha&=6\frac{E}{\sigma_y}\frac{1}{(1-\bar{\sigma})}\frac{h}{l}, \quad \gamma^*=\theta_Y^*/\theta_0\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

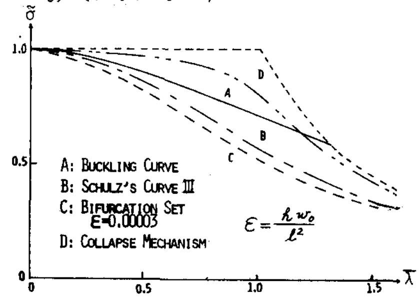

Fig. 3　柱の耐荷力曲線

ここに，「$\hat{}$」はEuler荷重，「$\bar{}$」は降伏応力での無次元化を示し，h, ℓ はそれぞれ柱の高さ，長さを示し，θ_0 は初期たわみ角である。結果をFig. 3に示す。

2) 板構造　鋼板が圧延成型の過程における熱ひずみのために Škaloud の提案する残留応力分布をもつ系を考える。この板を簡易化要素法を用いた離散化モデルで解析する。さて，Prandtl－Ruess の流れ理論と Von－Mieses の塑性判定式を用いると塑性域での構成関係式における剛性率 $[D^p]$ は，弾性の剛性率を $[D^e]$ として，板の面内外の *interaction* を考えれば

$$[D^p] = [D^e] - \frac{[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\left\lfloor\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\rfloor[D^e]}{H' + \left\lfloor\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\rfloor[D^e]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \qquad \cdots (6)$$

$$\begin{cases} H' : \text{ひずみ硬化パラメータ} \\ f : \text{Von－Mieses の塑性判定式} \end{cases}$$

である。板に圧縮力を加え局部塑性が始まると，材料非線形性のために多くの増分反復計算を要するが，釣合式に幅厚比 β_0 を剰じた定式化：

$$\tilde{V}_i = \{\tilde{K}^B_{ij} - (\beta_0^2 \cdot \Lambda_{cr})\tilde{K}^G_{ij}\}\tilde{\omega}_j = 0 \qquad \cdots (7)$$

$\tilde{V}_i = V_i \cdot \beta_0^2 / \sigma_y h^2$，$\beta_0$：幅厚比，$\Lambda$：荷重，
K^B_{ij}：面外剛性行列，K^G_{ij}：幾何学的剛性行列

を行い，非線形解析過程の任意の弾塑性状態において上式の固有値を幅厚比と座屈荷重の積の形で求め，この積は異なる系の同じ弾塑性状態も示すものと考えれば1度の非線形解析で座屈曲線を求めることができる。(Fig. 4)　このグラフの不連続は代表応力を要素中央にとり要素毎に塑性化判定を行うためであり，離散化モデルでは避けることはできない。比較の為，柱の強軸回りの弾塑性座屈曲線を同図内にプロットしてみた。

さてこの板モデルにカタストロフィー理論を用いる場合，$[D^p]$ が応力の関数であることから $[D^p]$ の変位に関する偏微分係数を考慮する必要がある。そこで，

$$\frac{\partial D^p_{ij}}{\partial w_k} = \frac{\partial D^p_{ij}}{\partial \sigma_m'} \cdot \frac{\partial \sigma_m'}{\partial \varepsilon_n} \cdot \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial w_k} \quad (\text{以下 } D_{ijk} \text{ とする})$$
$$= C'^{p}_{ijkp} w_p + C''^{p}_{ijk} + O(w^2) \qquad \cdots (8)$$

$$\begin{cases} w_k : \text{離散化モデルの面外変位} \\ C'^{p}_{ijkp} : w \text{の一次項の係数} \\ C''^{p}_{ijk} : \text{定数項} \end{cases}$$

と偏微分係数が求まり，柱の場合同様座屈直後のひずみ挙動に *Shanley* 効果を考えれば，系のポテンシャルの3階の偏微分係数が次式に求まる。

$$V_{ijk} = 2[K''^{B}_{ijk} - \Lambda_u K''^{G}_{ijk}] + O(w) \qquad \cdots (9)$$

$$\begin{cases} K''^{B} = \int_V B^B_{pi} C''^{p}_{pqk} B^B_{qj}\, dV \\ K''^{G} = -\left(\int_V B^p_{pm} C''^{p}_{pqk} B^{BB}_{qij}\, dV\right)(K'^{p}_{nm})^{-1} P_{on} \end{cases}$$

ここに，「$'$」は弾塑性状態での計算を表す。さて，この偏微分係数は一般に0にならず板の弾塑性座屈もまた非対称座屈，つまり Fold Catastrophe である。次に，初期不整を有する係の敏感性に関する問題に対してカタストロフィー理論を用いる場合，固有行列 Φ_{ij} を用いてポテンシャルの数学的低次元化を行ない，不安定現象に関して本質的な変数に関する偏微分係数を求める。即ち，

$$V \xmapsto{\;\Phi\;} A$$

$$\begin{cases} \dot{A}_{\alpha c} = \Phi_{j\alpha} \dot{V}_{jc} \\ \quad = \Phi_{j\alpha} K'^{PB}_{jnq} (K'^{p}_{\ell n})^{-1} (\Lambda_u P^u_{o\ell} + \lambda_{u\ell}) \Phi_{q\alpha} \\ \mathring{A}_{\alpha\alpha c} = \Phi_{j\alpha} \Phi_{k\alpha} \mathring{V}_{jkc} \\ \quad = -\Phi_{j\alpha} K'^{G}_{jkc} \Phi_{k\alpha} \\ A_{\alpha\alpha\alpha c} = \Phi_{j\alpha} \Phi_{k\alpha} \Phi_{\ell\alpha} V_{jk\ell c} \\ \quad = \Phi_{j\alpha} \Phi_{k\alpha} \Phi_{\ell\alpha} (K''^{B}_{jk\ell} - \Lambda_u K''^{G}_{jk\ell}) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} K^p_{ij} : \text{面内剛性行列} \\ P^u_{oi} : \text{面内荷重ベクトル} \end{pmatrix}$$

このとき，$\frac{1}{2}$ 剰則は次式に表される。

$$\Lambda_u = \Lambda_{cr} - \sqrt{2}\{A_{\alpha\alpha\alpha c} \cdot \dot{A}_{\alpha c}\, \varepsilon\}^{\frac{1}{2}} / \mathring{A}_{\alpha\alpha c} \qquad \cdots (11)$$

ここに，「$\circ$」，「$\bullet$」はそれぞれ荷重，初期不整での微分を示し，「$_c$」は座屈点を示す。尚，文中の K^p_{ij}，B^p_{ij} 等は，離散化モデルにおける剛性マトリックス，及び形状関数等である。　式(11)を用いた数値計算例については講演当日発表する。

〔3〕 あとがき

弾塑性大変形問題を非線形解析で求めるには膨大な計算時間を要する。カタストロフィー理論では完全系の座屈特異点の性質で敏感性を議論でき，計算時間を短縮し，複数の座屈パラメータに対する同時座屈に関する敏感性曲面も大局的に求められる。

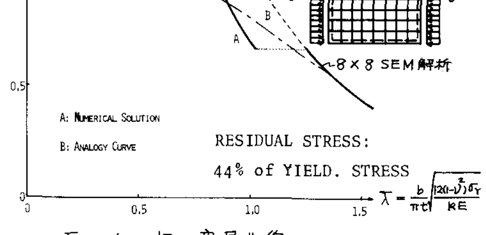

Fig. 4　板の座屈曲線