

京都大学工学部 正 員 丹羽 義次
 京都大学工学部 正 員 渡辺 英一
 京都大学大学院 学生員 O 勇 秀憲

1. きえがき

構造設計の最適過程における完全系の示す同時座屈現象を、耐荷力と初期不整の視点からとらえることは非常に重要なことである。耐荷力におよぼす初期不整の鋭敏性は、カタストロフィー理論では耐荷力-初期不整空間における分岐集合として把握できる。

本報告では、特に2つの分岐座屈が同時に起こるとき、その分岐集合がへそのカタストロフィーで表わされることを示す。そして、非対称座屈モデルおよび圧縮補剛板モデルについて双曲的へそのカタストロフィーの分岐集合を図示する。

2. 同時座屈現象

構造物の示す静的弾性不安定現象は、離散化手法とモード変換法により低次元化された少自由度空間(次元 n)において再現される。¹⁾

この部分空間は、 n 個の独立した座屈変形モード v_i を基底にもつ空間であり、系のポテンシャル D の2次形式 $D_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial v_i \partial v_j} (1 \leq i, j \leq n)$ を対角化する空間である。

いま、2つの分岐座屈現象が同時に重複して生じる場合を考える。つまり、2次形式の係数が、

$$D_{ii} = 0 \quad (i=1, 2) \quad \text{かつ} \quad D_{\alpha\alpha} \neq 0 \quad (\alpha=3, 4, \dots, n)$$

座屈変形モード v_i に対応する初期変形モードを E_i とする。このとき、 D_{ij} は対角化されているので、 D の双1次形式の係数 $D_i^1 = \frac{\partial D}{\partial v_i} (1 \leq i \leq n)$ は、

$$D_i^1 = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{かつ} \quad D_i^1 \neq 0 \quad (i=j)$$

さらに、系が単一の荷重パラメータ λ をコントロールされているものとする。いま、 λ と E_i を固定するとき、拡張されたモーズの定理を用いて、 D は同時座屈点のまわりで次の形に変換・展開することができる。

$$D(v_1, \dots, v_n) = A(x_1, x_2) + \sum_{\alpha=3}^n (\pm x_\alpha^2)$$

ここに、 $A(x_1, x_2)$ は2つの本質的変数 $x_1 = v_1, x_2 = v_2$ から成る次数 n 以上の多項式である。右辺の $\sum_{\alpha=3}^n$ 第2項以降は非本質的変数 $x_\alpha (\alpha=3, 4, \dots, n)$ の2次形式であ

り、カタストロフィーには無関係である。また、上記の双1次形式 D_i^1 の条件より、ポテンシャル A に関する初期不整パラメータは E_1 と E_2 だけである。

結局、同時座屈を生じる構造物の多自由度ポテンシャルは、その2つの同時座屈モードを示す本質的変数 x_1, x_2 から成る2自由度ポテンシャルに置きかえられる。このとき、この2自由度系のコントロールパラメータは、 x_1, x_2 に対応する初期不整パラメータ、 E_1, E_2 、および荷重パラメータ λ の3個である。

3. へそのカタストロフィー

ポテンシャル $A(x_1, x_2, \lambda, E_1, E_2)$ は、2つの変換(微分位相同型写像) g_1, g_2 により、有名なトムのへそのカタストロフィー $F(X, Y, \Lambda, E_1, E_2)$ のいずれかと同値になる。ここに、 X, Y はへそのポテンシャル F の2個の状態変数、 Λ, E_1, E_2 は3個のコントロール変数で、それぞれ x_1, x_2 および λ, E_1, E_2 と g_1, g_2 によって具体的に対応させられている。

いま、2つの分岐座屈が同時に起こる場合の固有値問題は次の形で与えられるものとする。

$$A_{11} = K_{11}^B - \lambda K_{11}^E = 0 \quad \text{かつ} \quad A_{22} = K_{22}^B - \lambda K_{22}^E = 0$$

ここに、 $K_{11}^B, K_{11}^E, K_{22}^B, K_{22}^E$ は与えられた定数。

このとき、 g_1, g_2 の具体的な形は次のように求められる。

微分位相同型写像 (g_1, g_2)

$$\begin{cases} X = x_1 + E_1 \\ Y = x_2 + E_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \Lambda = (\lambda_{cr} - \lambda) K_{11}^E \\ E_1 = -\lambda_{cr} K_{11}^E E_1 \\ E_2 = -\lambda_{cr} K_{22}^E E_2 \end{cases}$$

ここに、 λ_{cr} は完全系の同時座屈荷重で上記の固有値問題の解である。やえに、

$$\text{へそのカタストロフィーポテンシャル } F(X, Y, \Lambda, E_1, E_2)$$

$$F = \frac{1}{3} \alpha Y^3 + \frac{1}{2} \beta X^2 Y + \frac{1}{2} \Lambda (X^2 + \tau Y^2) + E_1 X + E_2 Y$$

ここに、 $\alpha = \frac{1}{2} A_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x_2^3} \right)$, $\beta = A_{112} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2 \partial x_2}$, $\tau = K_{22}^E / K_{11}^E$;

したがって、元の多自由度系の不安定問題が、トムのポテンシャルの問題として再現される。^{1),2)}

4. 初期不整の鋭敏性

カタストロフィー理論においては、構造物の弾性耐荷力と初期不整の関係が、コントロール変数空間内の分岐集合という形で認識される。

特に、へその場合の分岐集合は以下のようにして得られる。上記のへそのポテンシャル F を用いて、

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial Y^2} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial X \partial Y} \right)^2 = 0.$$

をすべて満足する X, Y, Λ, E_1, E_2 から X, Y を消去することにより得られる3次元空間 (Λ, E_1, E_2) 内の曲面が分岐集合である。例として、簡単な構造モデルを用い数値解により分岐集合を具体的に図示する。

非対称座屈モデル

このモデルでは、不安定対称座屈と非対称座屈が重複して起こるときに、同一傾斜座屈点をもつ双曲的へそのカタストロフィーを示す。²⁾

図1は、剛体-ばね要素から成る2自由度モデルの分岐集合、図2は、軸圧縮を考慮した有限要素モデルの分岐集合を示す。両者の相違は軸方向ひずみの有無によると思われる。なお、図1,2中の E_1, E_2 はそれぞれ不安定対称座屈および非対称座屈モードに対応する。

圧縮補剛板モデル

一様面内圧縮力を受ける周辺単純支持の、非対称補剛板を有する正方形板を考える。補剛板と板の断面積比一定のもとで、ある曲げ剛比に対して、この補剛板は全体座屈(補剛板のオイラー座屈; 非対称座屈)と局所座屈(板の座屈; 安定対称座屈)が同時に重複して起こる。このとき、系は単一傾斜座屈点をもつ双曲的へそのカタストロフィーを示す。²⁾

図3は、その分岐集合である。図中の E_1, E_2 はそれぞれ局所座屈および全体座屈モードに対応する。また、破線および実線の曲面は、面内の変位の拘束を考慮しないものと考慮したものを比較したものである。³⁾ 前者は後者に比べて初期不整に対して鋭敏であるといえる。

なお、図1~3で原点を Λ 軸上1.0に移動している。

本報告では、弾性現象だけを取り扱ったが、現実的な耐荷力を議論する場合には塑性挙動を考慮する必要がある。詳細は当日O.H.P.を使って発表する予定である。

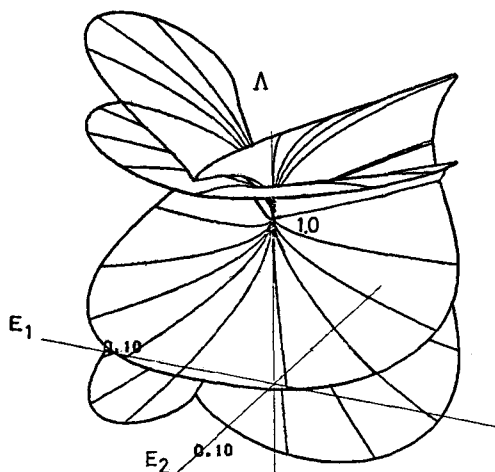


Fig.1 Imperfection-sensitivity of a 2-degree-of-freedom system ... homeoclinical bifurcation

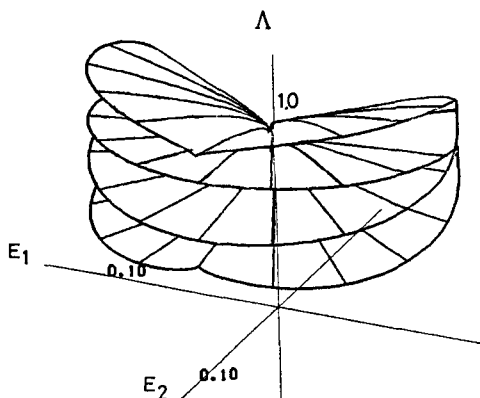


Fig.2 Imperfection-sensitivity of a finite element system ... homeoclinical bifurcation

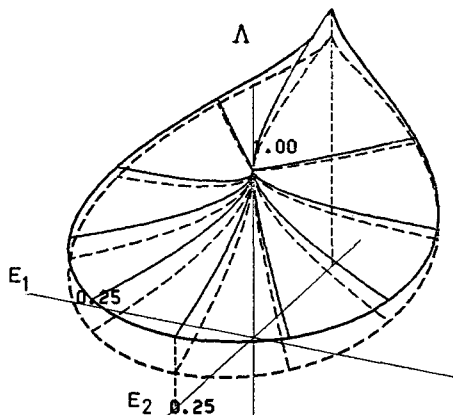


Fig.3 Imperfection-sensitivity of a stiffened plate model ... monoclinical bifurcation

- 1) Niwa, Y., E. Watanabe and H. Isami, Catastrophe Analysis of Structures by Discretization and Modal Transforms, Memoirs of the Faculty of Engineering Kyoto University, 43(1), 1981.
- 2) 坪井, 渡辺, 勇, 多自由度系構造物のカタストロフィーに関する研究, 第35回工学会年次大会講演会報告集, I-39, 1980.
- 3) 坪井, 渡辺, 勇, 弾性変位を受ける構造物のカタストロフィー特性について, 昭和56年度土木学会秋季学術講演会報告集, 1981.