

愛媛大学 正員 見沢繁光 正員 大賀水田生
徳山高専 正員 重松恒美 正員 原 隆

1. まえがき

今日、サンドイッチ板の座屈解析は板の座屈解析の場合と同様、級数解、有限要素法、有限帯板法そして伝達マトリックス法などにより数多く行われている。これらの解析法の中で有限帯板法および伝達マトリックス法は有限要素法に比べて小さなマトリックス演算で計算を行うことができ、補剛板や折板構造の座屈解析に成果をあげている。しかし、これらの方法は公式化が煩雑であることのほか、構造物の形状とか境界条件に制限される問題点がある。そこで本研究ではDokainishが板の振動問題に適用した有限要素と伝達マトリックスを組み合わせる方法によりサンドイッチ板の座屈解析を行った。この方法は通常の有限要素法に用いられる剛性マトリックスから伝達マトリックスを誘導し、得られた伝達マトリックスを用いて計算を行うものであり、要素剛性マトリックスの誘導までは有限要素(FE)の概念であり、それ以後の計算は伝達マトリックス(TM)の手順で行うので本論文ではFE-TM法と称する。

2. 解析法

本研究ではサンドイッチ板の剛性マトリックスをPanの研究にもとづく応力仮定のHybrid法により誘導した。図-1にサンドイッチ板矩形要素および節点変位を示している。なお、仮定した要素内応力は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + \beta_2 \bar{x} + \beta_3 \bar{y} + \beta_4 \bar{x}^2 + \beta_5 \bar{x} \bar{y} + \beta_6 \bar{y}^2 \\ \sigma_y &= \beta_7 + \beta_8 \bar{x} + \beta_9 \bar{y} + \beta_{10} \bar{x}^2 + \beta_{11} \bar{x} \bar{y} + \beta_{12} \bar{y}^2 \\ \tau_{xy} &= \beta_{13} + \beta_{14} \bar{x} + \beta_{15} \bar{y} + \beta_{16} \bar{x}^2 + \beta_{17} \bar{x} \bar{y} + \beta_{18} \bar{y}^2 \\ \tau_{xz} &= \beta_{19} + \beta_{20} \bar{x} + \beta_{21} \bar{y}, \quad \tau_{yz} = \beta_{22} + \beta_{23} \bar{x} + \beta_{24} \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/b$

解析手順はまず図-2(a)に示す面内力を受けるサンドイッチ板を m 個の strip に分割し、さらにそれぞれの strip を図-2(b)のような有限要素に分割する。次に、サンドイッチ板要素の剛性マトリックス、修正剛性マトリックスをそれぞれの strip ごとに組み込むが、その際、strip の左側の節点(図-2(b)の $1 \sim n$ 節点)の変位成分と右側の節点(図-2(b)の $n+1 \sim 2m$ 節点)の変位成分を分けるように組み込むと i 番目の strip の節点力と節点変位を関係づける式が次のように得られる。

$$[(K_b)_i - k(K_m)_i] \{\delta\}_i = \{F\}_i$$

または

$$[K]_i \{\delta\}_i = \{F\}_i \quad (2)$$

ここに、 $\{\delta\}_i = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \varphi_{x1}, \varphi_{x2}, \dots, \varphi_{xn}, \varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \dots, \varphi_{yn}, w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_{2m}, \varphi_{x(n+1)}, \varphi_{x(n+2)}, \dots, \varphi_{x(2m)}, \varphi_{y(n+1)}, \varphi_{y(n+2)}, \dots, \varphi_{y(2m)}\}^T = \{w_i^L, \varphi_{xi}^L, \varphi_{yi}^L, w_i^R, \varphi_{xi}^R, \varphi_{yi}^R\}^T = \{\delta_i^L, \delta_i^R\}^T$, $\{F\}_i = \{F_i^L, F_i^R\}^T = \{\delta\}_i$ に対応して組み込まれた節点力ベクトル, $(K_b)_i, (K_m)_i: \{\delta\}_i, \{F\}_i$ に対応し

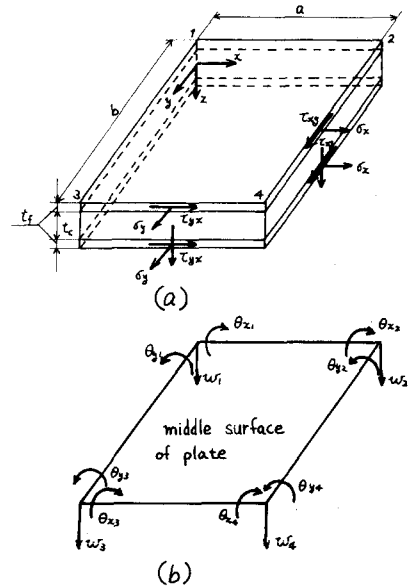


図-1 サンドイッチ板要素

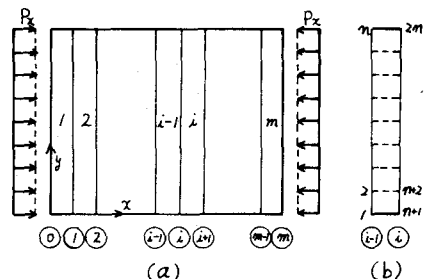


図-2 要素分割

て組み込まれた strip i の剛性マトリックスおよび修正剛性マトリックス、 $k_b = B R / \pi D$: 座屈係数, $D = E t \{ (2t_f + t_c)^2 - t_c^2 \} / 12 (1 - \nu^2)$: サンドイッチ板の曲げ剛性

式(2)を変形させることにより strip の左側の状態量と右側の状態量を関係づける格間伝達マトリックスを誘導する。まず、式(2)の剛性マトリックス $[K]_i$ を次のようなサブマトリックスに分割する。

$$\begin{Bmatrix} F^L \\ F^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta^L \\ \delta^R \end{Bmatrix}_i \quad (3)$$

簡単なマトリックス演算により strip i の左右の状態量を関係づける式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_{i+1} &= \begin{Bmatrix} \delta^R \\ -F^R \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_i \\ \text{または} \quad \begin{Bmatrix} \delta^L \\ F^L \end{Bmatrix}_{i+1} &= [T]_i \begin{Bmatrix} \delta^R \\ F^R \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)の $[T]_i$ が求めるサンドイッチ板の格間伝達マトリックスである。この格間伝達マトリックスの大きさは strip が $2m$ 個の節点を有する場合、 $2m \times$ (節点の自由度数) となる。本論文では節点の自由度数は3個なので $(6m \times 6m)$ のマトリックスとなる。

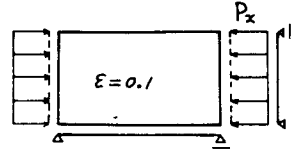
この格間伝達マトリックスを用いて左端の状態量を右端に伝達させて計算を行うが、その際、マトリックスの掛け合わせによる桁落ちを防止するため次の標準化を行った。

$$\begin{aligned} {}^*w &= Dw, & {}^*q_x &= -bDq_x, & {}^*p_y &= bDp_y \\ {}^*Q &= b^2Q, & {}^*M_x &= b^2M_x, & {}^*M_y &= b^2M_y \end{aligned} \quad (5)$$

3. 数値計算および検討

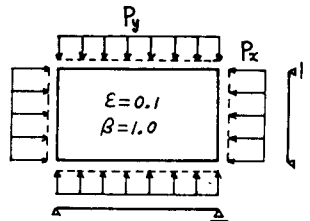
いろいろな境界条件について一方向および二方向面内荷重を受けるサンドイッチ板の座屈解析を行った。パラメータとして形状比 a/b 、せん断剛性比 $E = \pi^2 D / b^2 G \alpha t_c$ などを用いた。表-1 は一方向圧縮荷重を受ける四辺単純支持サンドイッチ板の形状比 a/b が 0.4~3.2, せん断剛性比 $E = 0.1$ における結果を示している。同時に、本法による解を他の方法による解と比較するために級数解および有限要素法による結果をも示している。本法と有限要素法での分割数はいずれも $(8-8)$ 分割である。表-1 より明らかなように本法と有限要素法は数値計算での許容誤差の範囲で一致している。本法と級数解との比較では形状比 a/b が 1.0 の近傍では両者は非常に良く一致している。その他の範囲でもかなり良く一致しており誤差は約 5~7% である。表-2 は二方向圧縮荷重を受ける四辺単純支持のサンドイッチ板の場合で、せん断剛性比 E は 0.1 である。また、荷重比 $\beta = R/p_y$ は 1.0 で分割数は有限要素法、本法とも $(6-6)$ 分割である。本法と有限要素法は一方向荷重の場合と同様非常に良く一致している。本法と級数解の比較ではいずれの形状比でも 4~6% の誤差である。なお、本法による補剛材を有するサンドイッチ板の座屈解析と格点マトリックスを導入することにより検討中である。

表-1 座屈係数



a/b	Ref. 2 k_0	FETM (8-8) k_0	$k_0 - k_1$ k_0	FEM (8-8) k_0	$k_0 - k_2$ k_0
0.4	4.88	4.63	5.1	4.62	5.3
0.6	3.73	3.61	3.2	3.60	3.5
0.8	3.35	3.25	3.0	3.24	3.3
1.0	3.33	3.24	2.7	3.24	2.7
1.2	3.54	3.44	2.8	3.44	2.8
1.4	3.47	3.43	1.2	3.43	1.2
1.6	3.35	3.32	0.9	3.31	1.2
1.8	3.31	3.28	0.9	3.28	0.9
2.0	3.33	3.31	0.8	3.30	1.0
2.2	3.41	3.38	0.9	3.37	1.2
2.4	3.35	3.49	-4.2	3.49	-4.2
2.6	3.31	3.54	-7.0	3.54	-7.0
2.8	3.31	3.54	-7.0	3.53	-6.6
3.0	3.33	3.56	-6.9	3.54	-6.3
3.2	3.35	3.59	-7.2	3.58	-6.9

表-2 座屈係数



a/b	Ref. 2 k_0	FETM (6-6) k_0	$k_0 - k_1$ k_0	FEM (6-6) k_0	$k_0 - k_2$ k_0
0.4	4.20	3.96	5.7	3.94	6.2
0.6	2.74	2.62	4.5	2.61	4.7
0.8	2.04	1.96	3.9	1.95	4.5
1.0	1.67	1.59	4.8	1.59	4.8
1.2	1.45	1.39	4.1	1.39	4.1
1.4	1.31	1.28	2.3	1.26	3.8
1.6	1.22	1.17	4.1	1.17	4.1
1.8	1.16	1.11	4.3	1.11	4.3
2.0	1.11	1.07	3.6	1.06	4.5
2.2	1.08	1.04	3.7	1.03	4.6
2.4	1.05	1.01	3.8	1.01	3.8
2.6	1.03	0.99	3.9	0.99	3.9
2.8	1.01	0.97	4.0	0.97	4.0
3.0	1.00	0.96	4.0	0.96	4.0

参考文献 1) A.M. Dokainish: A New Approach for Plate Vibrations, Transactions of the ASME, 1972

2) Plantema, F.F.: Sandwich Construction, John Wiley & Sons, 1966