I－98　差分法によるくい基礎のフーチングの応力解析

黒沢尻工業高校　正員　安彦 敏郎
岩手大学　正員　宮本 裕
北海道大学　正員　渡辺 昇

1．まえがき

本報告は，くい基礎のフーチングを 地盤反力係数が局部的に異なる弾性床上の変厚板と考え，差分法を用いて解析したものである。

2．解析法

(a) 微分方程式 ： 弾性床上の変厚板についての微分方程式は，たわみをW，曲げ剛性をD，分布荷重強度をp，地盤の反力係数をk，ポアソン比をνとすれば，次のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right\}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left\{D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right\}=p-kW \cdots\cdots(1)$$

また，曲げモーメントM_x, M_y，ねじりモーメントM_{xy}，せん断力Q_x, Q_y，反力V_x, V_yは，次のように表わされる。

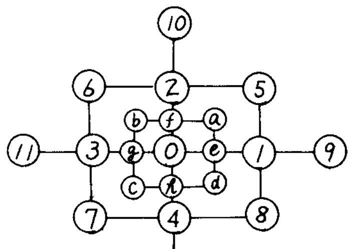
$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right),\quad M_{xy}=M_{yx}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \quad ---------(2)$$

$$Q_x=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\},\quad Q_y=\frac{\partial}{\partial y}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\} \cdots(3)$$

$$V_x=\frac{\partial}{\partial x}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right\}+2\frac{\partial}{\partial y}\left\{-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\},\quad V_y=\frac{\partial}{\partial y}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right\}+2\frac{\partial}{\partial x}\left\{-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\} \cdots(4)$$

(b) 差分化 ： 式(1)～(4)を差分化する場合，Dのちらばりを，O点に関して対称にとるため，格子分割をさらに細かくし，$a \sim h$の9点を設けこれらの点での板剛性を$D_a \sim D_h$とする。（図－1）

$$\begin{aligned}
&\{D_1+D_2+D_3+D_4+2(1-\nu)(D_a+D_b+D_c+D_d)+8D_0(1-\nu)\}W_0\\
&-2\{(1+\nu)(D_0+D_1)+(1-\nu)(D_a+D_d)\}W_1-2\{(1+\nu)(D_0+D_2)+(1-\nu)(D_a+D_b)\}W_2\\
&-2\{(1+\nu)(D_0+D_3)+(1-\nu)(D_b+D_c)\}W_3-2\{(1+\nu)(D_0+D_4)+(1-\nu)(D_c+D_d)\}W_4\\
&+\{\nu(D_1+D_2)+2(1-\nu)D_a\}W_5+\{\nu(D_2+D_3)+2(1-\nu)D_b\}W_6\\
&+\{\nu(D_3+D_4)+2(1-\nu)D_c\}W_7+\{\nu(D_4+D_1)+2(1-\nu)D_d\}W_8\\
&+D_1W_9+D_2W_{10}+D_3W_{11}+D_4W_{12}\\
&=h^4(p-kW_0) \qquad ---------(5)
\end{aligned}$$


（図－1）

$$M_x=-\frac{D_0}{h^2}\{-2(1+\nu)W_0+\nu(W_2+W_4)+W_1+W_3\},\quad M_y=-\frac{D_0}{h^2}\{-2(1+\nu)W_0+\nu(W_1+W_3)+W_2+W_4\}$$

$$M_{xy}=-\frac{D_0}{4h^2}(1-\nu)(-W_5+W_6-W_7+W_8) \qquad ---------(6)$$

$$\begin{aligned}
Q_x=-\frac{1}{2h^3}\Big[&(D_1-D_3)W_0-\{2(1+\nu)D_1+(1-\nu)(D_h+D_f)\}W_1+\{2(1+\nu)D_3+(1-\nu)(D_h+D_f)\}W_3+\{\nu D_1+(1-\nu)D_f\}W_5\\
&-\{\nu D_3+(1-\nu)D_f\}W_6-\{\nu D_3+(1-\nu)D_h\}W_7+\{\nu D_1+(1-\nu)D_h\}W_8+D_1W_9-D_3W_{11}\Big]\\
Q_y=\frac{-1}{2h^3}\Big[&(D_4-D_2)W_0+\{2(1+\nu)D_2+(1-\nu)(D_e+D_g)\}W_2-\{2(1+\nu)D_4+(1-\nu)(D_e+D_g)\}W_4-\{\nu D_2+(1-\nu)D_e\}W_5\\
&-\{\nu D_2+(1-\nu)D_g\}W_6+\{\nu D_4+(1-\nu)D_g\}W_7+\{\nu D_4+(1-\nu)D_e\}W_8-D_2W_{10}+D_4W_{12}\Big] \cdots\cdots(7)
\end{aligned}$$

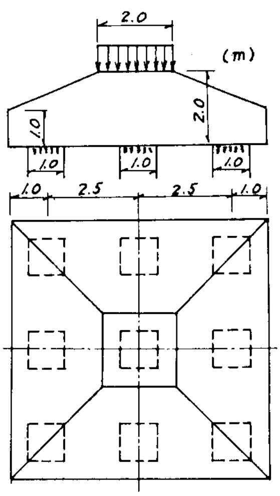
$$V_x = -\frac{1}{2h^3}\Big[(D_1-D_3)W_0 - 2\{(1+\nu)D_1+(1-\nu)(D_f+D_h)\}W_1 + 2\{(1+\nu)D_3+(1-\nu)(D_f+D_h)\}W_3$$
$$+\{\nu D_1+2(1-\nu)D_f\}W_5 - \{\nu D_3+2(1-\nu)D_f\}W_6 - \{\nu D_3+2(1-\nu)D_h\}W_7 + \{\nu D_1+2(1-\nu)D_h\}W_8 + D_1W_9 - D_3W_{11}\Big]$$
$$V_y = -\frac{1}{2h^3}\Big[(D_4-D_2)W_0 + 2\{(1+\nu)D_2+(1-\nu)(D_e+D_g)\}W_2 - 2\{(1+\nu)D_4+(1-\nu)(D_e+D_g)\}W_4 - \{\nu D_2+2(1-\nu)D_e\}W_5$$
$$-\{\nu D_2+2(1-\nu)D_g\}W_6 + \{\nu D_4+2(1-\nu)D_g\}W_7 + \{\nu D_4+2(1-\nu)D_e\}W_8 - D_2W_{10} + D_4W_{12}\Big] \quad (8)$$

(c) ： 自由辺周辺点および、対称軸周辺点の処理 ： 差分化にともない、周辺の外側に2層の外点を生ずるがこれらの仮想の点を、以下のような関係を用いて内点におきかえて表わす。1層目の外点については、偶角部では $M_x = M_y = M_{xy} = 0$，周辺部では $M_x = 0$ または $M_y = 0$，2層目の外点については、これらに加え、偶角部では $V_x = V_y = 0$，周辺部では $V_x = 0$ または $V_y = 0$。また、D は周辺を軸として対称に広がっているものと考える。さらに、2本の対称軸についての処理も行ない、25種類の差分式を導く。

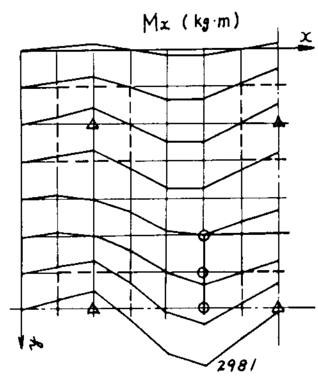
(d) 連立方程式による解法 ： これらの操作により、各格子点についての差分方程式が求められ、それらを、n個の格子点について適用すれば、n元の連立方程式が求められる。 この連立方程式を解くことによりWが求まり、これらを式(6)および(7)に代入し M および Qが求められる。

3 数値計算

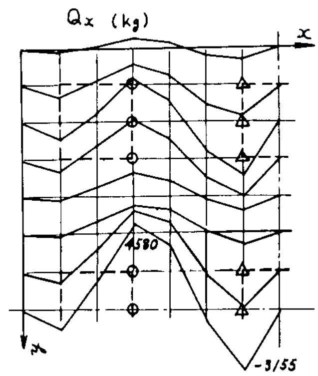
(図-2)のような、底面 7m × 7m，厚さ 1.0m ～ 2.0m のくい基礎のフーチングについて計算を行なう。なお、諸元は次のとおりである。 自重 $2400\,kg/m^3$，荷重 $4000\,kg/m^2$ 弾性係数 $E = 1.4\times10^9\,kg/m^2$，ポアソン比 $\nu = 0.25$， くいのバネ定数 $K_p = 2.1\times10^9\,kg/m^3$



(図-2)



(図-3)



(図-4)

(図-2)に示すモデルの 1/4 要素について，分割幅 $h = 0.5$ m として計算を行ない、M_x, Q_x を求め、これらを図示すると(図-3),(図-4) のようになる。この図で、○印は、正のMおよびQの特に大きな位置，△印は、負のMおよびQの特に大きな位置を示す。

4. 謝辞

： この研究を共に進めてきた、パシフィックコンサルタントの佐竹拓夫君（当時、岩手大学大学院）に感謝する。

5. 参考文献

： Zurmühl : Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren

能町純雄：弾性基礎上にある四辺四隅自由なく形板の曲げについて，土木学会論文集第32号

佐武正雄：土木技術者のための例題演習による数値解析 ― 差分法入門 ―

渡辺 昇 ：階差法による薄板の座屈計算法

佐竹・宮本・安彦：差分法による周辺自由の弾性床上平板の応力解析，東北支部研究発表会既要集(55年度)