

京都大学工学部 正員 丹羽 義次
 京都大学工学部 正員 渡辺 英一
 京都大学大学院 学生員 ○山田 郁夫

1. はじめに

近年、斜張橋が国内でも多く建設されるようになり、その社会的重要度が高くなるなかで、斜張橋ケーブルのクリープによって主桁が大きいたわむことが報告されている¹⁾。そこで本研究では、従来の解析が弾性解であるのに対し、ケーブルのクリープを考慮して斜張橋の経時的な変形を解明するため、次のような手法によって解析を行なった。まず、斜張橋の主桁と塔を弾性体、ケーブルを線形粘弾性体と仮定する。有限要素法を適用して、前者に対しては現空間においてつり合い式を求め、後者に対しては対応原理によりラプラス像空間においてつり合い式を求めて、それらを像空間で合成すると斜張橋全体のつり合い式が得られる。これに低次元化を施して計算の効率化を高め、得られた像空間の解を数値ラプラス逆変換して現空間の解を求める。なおこの際、和泉の方法²⁾を改良し、極限值定理を満足してかつ精度の良い数値ラプラス逆変換を行なった。

2. 数値計算のための定式化

斜張橋の主桁と塔を弾性体と仮定し、有限要素法によりこれらの棒要素の剛性マトリックスは次式となる。

$$[K_{ij}] = \left[\int_V B_{mi} \cdot E_{mn} \cdot B_{nj} dV \right] \quad \dots (1)$$

ここに、 E_{mn} はヤング率である。

また、ケーブルを線形粘弾性体と仮定し、対応原理から剛性マトリックスはラプラス像空間において弾性体のそれと同様に次式となる。

$$[\bar{K}_{ij}(s)] = \left[\int_V B_{mi} \cdot \bar{E}_{mn}(s) \cdot B_{nj} dV \right] \quad \dots (2)$$

ここに、 $\bar{E}_{mn}(s)$ はラプラス像空間におけるヤング率
 本研究では、線形粘弾性モデルとして Fig. 1 に示され

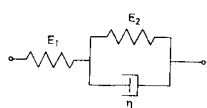


Fig. 1 3要素モデル

た3要素モデルを採用する。
 $\bar{E}_{mn}(s)$ は、ラプラス像空間における構成関係式より、棒要素の場合次式となる。

$$\bar{E}(s) = E_1 \frac{s + \mu}{s + \lambda} \quad \mu = \frac{E_2}{\eta}, \lambda = \frac{E_1 + E_2}{\eta} \quad (3)$$

(1), (2) 式がそれぞれ弾性体、線形粘弾性体の棒要素に対する剛性マトリックスであり、これらを全領域に拡大すれば全体の剛性マトリックスが得られる。この場合、ケーブルを主桁と塔を結ぶ部材と考えて、弾性体と線形粘弾性体の全体剛性マトリックスをラプラス像空間において合成すると斜張橋全体のつり合い式が次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11}(s) & \bar{K}_{12}(s) \\ \bar{K}_{21}(s) & \bar{K}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_1(s) \\ \bar{a}_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1(s) \\ \bar{P}_2(s) \end{Bmatrix} \quad \dots (4)$$

あるいは、簡単にして

$$[\bar{K}(s)] \{\bar{a}(s)\} = \{\bar{P}(s)\} \quad \dots (5)$$

ここに、添字の 1 は主桁、2 は塔を表わし、 $\bar{K}(s)$, $\bar{a}(s)$, $\bar{P}(s)$ はそれぞれ剛性マトリックス、一般化変位、一般化力である。

さて、(4) 式を直接計算することは、大次元になるほど多大の記憶容量と演算時間を必要として効率的でないので、変換マトリックスを導入し自由度の低減をはかる。ここでは、固有振動問題を解き固有値の小さい順に固有モードを並べて変換マトリックス $[\Phi]$ を決定した。

$$\{a\} = [\Phi] \{v\} \quad \dots (6)$$

(6) 式をラプラス変換してから、(5) 式に代入すると

$$[\bar{K}^*(s)] \{\bar{v}(s)\} = \{\bar{P}^*(s)\} \quad \dots (7)$$

ここに、 $[\bar{K}^*(s)] = [\Phi]^T [\bar{K}(s)] [\Phi]$

$$\{\bar{P}^*(s)\} = [\Phi]^T \{\bar{P}(s)\}$$

次に、低次元化された (7) 式より得られる解 $\{\bar{v}(s)\}$ は変換パラメータ s の離散的なデータとして与えられるので、数値ラプラス逆変換を行なう。その手法としては、今クリープ問題を考えているから、現空間での

解を
$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-b_i t} \quad b_1 = 0, b_i > 0 \quad \dots (8)$$

と仮定し、次式の極限值定理を満足させる。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \bar{v}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = v_0 \quad \dots (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \bar{v}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_{\infty}$$

(8) 式をラプラス変換して (9) 式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = v_0, \quad a_1 = v_{\infty} \quad \dots (10)$$

また、 $s \bar{v}(s)$ の変化の著しい範囲と $\bar{E}(s)$ の変化の著しい範囲とは、対応関係があるので、 $\bar{E}(s)$ の変化の著しい範囲よりいくつかの変換パラメータ s_k を選択する。この s_k について最小2乗法を用いて、未定係数 a_i, b_i を決定できる。2乗誤差を ϵ とすると、

$$f = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{s_k + b_i} - \bar{v}_k(s_k) \right)^2 \quad \dots (11)$$

ここに、 M は変換パラメータの数、 N は近似関数の項数である。

特に $N=2$ とすれば、(10) 式より

$$a_1 = v_{\infty}, \quad a_2 = v_0 - v_{\infty} \quad \dots (12)$$

そして、 b_2 は $\partial f / \partial b_2 = 0$ より

$$\sum_{k=1}^M \left(\frac{v_0}{s_k} + \frac{v_{\infty} - v_0}{s_k + b_2} - \bar{v}_k(s_k) \right) \cdot \frac{1}{(s_k + b_2)^2} = 0 \quad \dots (13)$$

から、 a_i, b_i がすべて求められる。

以上のようにして、極限值定理を満足しかつ精度の良い数値ラプラス逆変換を行なうことができる。

3. 数値解析例

尾道大橋と大阪川崎橋について解析を行なった。荷重としてはクリープの原因として活荷重の影響も大きいと考えられるが、ここでは主桁の自重が $t=0$ において載荷されたと仮定して計算をしている。

また、3要素モデルの E_1, E_2, η の値は次のように決めた。 $t=0$ でステップ応力の σ_0 が作用するとき、ひずみは(3)式をラプラス逆変換して

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-\eta t}) \quad \dots (14)$$

右辺の第1項が初期ひずみ、第2項がクリープひずみである。(14)式の第2項 ϵ_c に関して解くと

$$\eta = -E_2 t / \ln(1 - \epsilon_c E_2 / \sigma_0) \quad \dots (15)$$

ここに、 ϵ_c はクリープひずみ、 σ_0 は初期応力

E_1, E_2 をケーブルのヤング率 $E_c = 1.6 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ としたとき、尾道大橋の資料を参考にすると10年間のクリープひずみが0.018%で、 $\eta = 3.5 \times 10^7 (\text{kg/cm}^2) \cdot \text{year}$ となる。また、プレストレスの効果の評価、他の斜張橋との比較などについての詳細は当日発表する。

Fig. 2, 3に尾道大橋と川崎橋の初期変形後のクリープによる主桁のたわみの経年変化を示し、さらにFig. 4, 5にそれぞれの代表的な点(尾道大橋A点、川崎橋B点)について、その主桁のたわみ-時間曲線を示した。

最後になりましたが、貴重な資料と提供してくださいます大阪市の松村博氏に感謝の意を表します。

4. 参考文献

- 1) 尾道大橋ロックドコイルロープのクリープについて、関西道路研究会道路調査研究委員会資料、1977
- 2) 和泉有祐；構造物の粘弾性解析における効率化に関する基礎的研究、京都大学修士論文、1980
- 3) 中井幹雄、佐藤進、会田俊夫、富岡敬之；スパイラルロープのクリープとリラクセーションに関する研究、日本機械学会論文集、1975

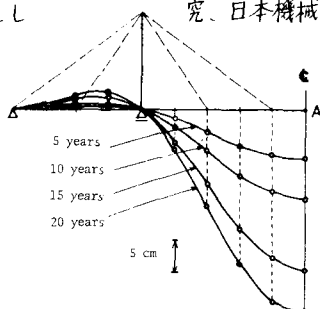


Fig. 2 尾道大橋のたわみの経年変化

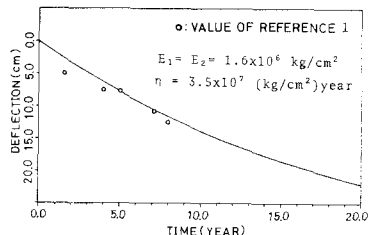


Fig. 4 尾道大橋A点のたわみ-時間曲線

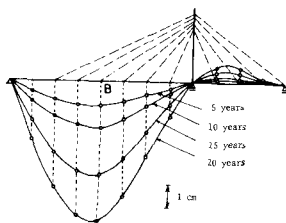


Fig. 3 川崎橋のたわみの経年変化

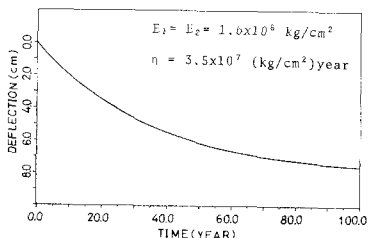


Fig. 5 川崎橋B点のたわみ-時間曲線