I-46　半無限弾性体表面に軸対称円輪線荷重及び放物体荷重が加わったときの応力と変位の解析

○ エヌ・ソイルデザインKK　河村隆二
国鉄 信濃川工事局　植木 博

1 まえがき

半無限体に円形等分布垂直及び水平荷重が加わった場合の定量的解析がなされている[1,2]。軸対称円輪線荷重及び放物体回転荷重が加わった場合，半無限体内での応力及び変位の定量的解析を楕円積分で表示する。又楕円函数とδ函数の関係を明らかにする。

2 理論式

Qを円輪線荷重として，半無限体に半径aにかかわったとする。Fourir－Besselの積分定理より，下方をz軸の正の方向とし，E：YOUNG率，ν：POISSON比として，変位u，w，応力σ_ρ，σ_θ，σ_z，$\tau_{\rho z}$について，

$$f(\rho)=-\int_0^\infty J_0(\rho\xi)\xi d\xi\int_0^\infty Q\delta(\lambda-a)\lambda d\lambda=-Qa\int_0^\infty J_0(\rho\xi)J_0(a\xi)\xi d\xi$$

一方Hankel[3]変換により，軸対称の場合円柱座標系での半無限体弾性論から次式を得る。

$$u=\frac{Qa(1+\nu)}{E}\int_0^\infty(-1+2\nu+z\xi)e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)d\xi \tag{1}$$

$$w=\frac{Qa(1+\nu)}{E}\int_0^\infty\{(2-2\nu)+z\xi\}e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)d\xi \tag{2}$$

$$\sigma_\rho=-Qa\left[-\int_0^\infty(-1+z\xi)e^{-\xi z}\xi J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)d\xi+\frac{1}{\rho}\int_0^\infty(-1+2\nu+z\xi)e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)d\xi\right] \tag{3}$$

$$\sigma_\theta=-Qa\left[2\nu\int_0^\infty\xi e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)d\xi-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty(-1+2\nu+z\xi)e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)d\xi\right] \tag{4}$$

$$\sigma_z=-Qa\int_0^\infty(1+z\xi)\xi e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)d\xi \tag{5}$$

$$\tau_{\rho z}=-Qaz\int_0^\infty\xi^2e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)d\xi \tag{6}$$

が得られる。ここで(1)式～(6)式までを$\int_0^a J_0(\lambda\xi)\lambda d\lambda=\frac{aJ_1(a\xi)}{\xi}$を用いると円形等分布荷重の関係が得られる。他方Neumannの加法定理を用いて，これらの積分を実行すると，楕円積分及び楕円積分の変形となり，

$$I_{001}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)\xi d\xi=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4z}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k), & z\neq0\\ \frac{1}{\sqrt{\rho a}}\delta(\rho-a), & z=0\end{cases} \tag{7}$$

$$I_{002}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)\xi^2d\xi=\begin{cases}\frac{3}{2\pi}z^2\cdot\frac{4}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{5/2}}K_5(k)-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k), & z\neq0\\ \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\delta(\rho-a)-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\delta(\rho-a) & z=0\end{cases} \tag{8}$$

$$I_{000}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)d\xi=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k), & z\neq0\\ \delta(\rho-a), & z=0\end{cases} \tag{9}$$

$$I_{010}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)d\xi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{SIGN}(a^2-\rho^2)-\frac{z}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)-\frac{(a-\rho)z}{\pi(a+\rho)\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}\Pi_0(n,k)\right] \tag{10}$$

$$I_{011}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)\xi d\xi=\left[\begin{cases}\frac{1}{\pi\rho\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k) & z\neq0\\ \frac{1}{2\rho}\delta(\rho-a), & z=0\end{cases}+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\rho\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\right] \tag{11}$$

$$I_{012}=\int_0^\infty e^{-z\xi}J_0(a\xi)J_1(\rho\xi)\xi^2d\xi=\left[\begin{cases}\frac{3z}{\pi\rho\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k), & z\neq0\\ \frac{3}{2\rho}\delta(\rho-a), & z=0\end{cases}+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\rho\{z^2+(a+\rho)^2\}^{5/2}}K_5(k)\right] \tag{12}$$

従って，(1)〜(6) 式は

$$u=\frac{Qa(1+\nu)}{E}\Bigg[(-1+2\nu)\frac{1}{\rho}\Bigg\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{SIGN}(a^2-\rho^2)-\frac{z}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)-\frac{(\rho-a)z}{\pi(a+\rho)\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}\Pi_0(n,k)\Bigg\}$$
$$+\frac{z}{\rho}\Bigg\{\frac{1}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\Bigg\}\Bigg] \tag{1'}$$

$$w=\frac{Qa(1+\nu)}{E}\Bigg[2(1-\nu)\begin{Bmatrix}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k), & z\neq 0\\ \delta(\rho-a), & z=0\end{Bmatrix}+\frac{z^2}{\pi}\cdot\frac{2}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\Bigg] \tag{2'}$$

$$\sigma_\rho=-Qa\Bigg[\begin{Bmatrix}\frac{z}{2\pi}\cdot\frac{4}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k), & z\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{\rho a}}\delta(\rho-a), & z=0\end{Bmatrix}-\Bigg\{\frac{3z^3}{2\pi}\cdot\frac{4}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{5/2}}K_5(k)-\frac{4z}{2\pi}\cdot\frac{1}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\Bigg\}$$
$$+\frac{1}{\rho^2}(-1+2\nu)\Bigg\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{SIGN}(a^2-\rho^2)-\frac{z}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)-\frac{(\rho-a)z}{\pi(a+\rho)\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}\Pi_0(n,k)\Bigg\}$$
$$+\frac{z}{\rho^2}\Bigg\{\frac{1}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\Bigg\}\Bigg] \tag{3'}$$

$$\sigma_\theta=-Qa\Bigg[2\nu\begin{Bmatrix}\frac{z}{2\pi}\cdot\frac{4}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k), & z\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{\rho a}}\delta(\rho-a), & z=0\end{Bmatrix}$$
$$-\frac{1}{\rho^2}(-1+2\nu)\Bigg\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{SIGN}(a^2-\rho^2)-\frac{z}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)-\frac{(a-\rho)z}{\pi(a+\rho)\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}\Pi_0(n,k)\Bigg\}$$
$$-\frac{z}{\rho^2}\Bigg\{\frac{1}{\pi\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)\Bigg\}\Bigg] \tag{4'}$$

$$\sigma_z=-Qa\begin{Bmatrix}\frac{6z^3}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{5/2}}K_5(k), & z\neq 0\\ \frac{1}{\sqrt{\rho a}}\delta(\rho-a), & z=0\end{Bmatrix} \tag{5'}$$

$$\tau_{\rho z}=-\frac{3Qaz^2}{\rho}\Bigg[\frac{1}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)+\frac{(\rho^2-a^2-z^2)}{\pi\{z^2+(a+\rho)^2\}^{5/2}}K_5(k)\Bigg] \tag{6'}$$

変位，応力が求められた．ここで $k^2=\frac{4a\rho}{z^2+(a+\rho)^2}$，$n^2=\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2}$ であり，$K(k)$，$\Pi_0(n,k)$ は才一種，才三種完全楕円積分であり，$K(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$，$\Pi_0(n,k)=\int_0^{\pi/2}(1-n^2\sin^2\theta)^{-1}(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$ である．一方 $K_3(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-3/2}d\theta=(1-k^2)E(k)$，$K_5(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-5/2}d\theta$

3 δ函数と完全楕円積分との関係

$$\lim_{z\to 0}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi z}\xi J_n(a\xi)J_n(\rho\xi)=\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\delta(\rho-a)$$ の関係がある．(7)式より

$$\lim_{z\to 0}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi z}\xi J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\pi}\cdot\frac{1}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}K_3(k)=\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\delta(\rho-a)$$ となり，同様に

$$\lim_{z\to 0}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi z}J_0(a\xi)J_0(\rho\xi)=\lim_{z\to 0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2+(a+\rho)^2}}K(k)=\delta(\rho-a)$$，又 $E(k)$，$\Pi_0(n,k)$ についても $\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\pi}\cdot\frac{E(k)}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{1/2}\{z^2+(a-\rho)^2\}^{3/2}}=\delta(\rho-a)$，$\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\pi}\cdot\frac{1}{\{z^2+(a+\rho)^2\}^{3/2}}\Pi_0(n,k)=\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\delta(\rho-a)$ が得られる．

4 まとめ

線円輪荷重の解析はタンクシエルによる輪荷重等の解析に有用である．ここでは半無限体内任意の点 (ρ,z) に対し，定量的に求められる事を示した．又無限大となる場合δ函数と完全楕円積分の関係から表現が可能となった．回転放物体荷重の場合の解析については当日発表します。

参考

1) 才35回年次講演会才三部門概要集　河村隆二　植木傳　2) 才30回応用力学連合講演会概要集
3) 宮本博 三次元弾性論，最上武雄，木村孟 土質力学