

中部電力

正員 ○ 上田 稔

瀧上工業

正員 中谷一弘

名古屋工業大学

正員 長谷部宜男

まえがき 弾性体中の円形剛体介在物にはく離が生じき裂が発生した状態の応力解析を、平面弾性混合境界値問題として行う。解法は複素変数と分数式の和の写像関数を用いる方法[1]で、ここでは単位円外に写像する関数を用いる。この解法により混合境界値問題についても、比較的任意形状の、そして写像関数の表わす形状に対して厳密解が閉じた形で得られる。また混合境界でき裂が存在するような問題の解析が可能となる。無限遠で一樣引張をうける場合の、応力分布やき裂先端における応力拡大係数、はく離先端における応力特異性の大きさを示す値（応力拡大係数に対応する）を、いくつかのき裂長さやはく離の長さに対して求める。

解法 結果式のみを示す。図-1に示す円孔の対称軸上にき裂のある無限領域を単位円外に写像する関数を次式の形に作る。

$$Z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^{25} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (1)$$

上式に対して複素応力関数の一般解は、

$$\varphi(\zeta) = -\chi(\zeta) \sum_{k=1}^{25} \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + H(\zeta) \quad (2) \quad \text{図-1 } Z \text{ 平面と } \zeta \text{ 平面}$$

ここに $\chi(\zeta)$ はplemelj関数で $(\zeta - \alpha)^m (\zeta - \beta)^{-m}$, $m = 0.5 - i(\ln \kappa)/2\pi$, $B_k = E_k / \omega'(\zeta_k)$, ζ_k は ζ_k の単位円に関する鏡映点, $\bar{A}_k$ は未定定数, κ はポアソン比を ν とすると, $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ), $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ (平面応力)である。また $H(\zeta)$ は境界条件によって決まる関数である。図-1で θ 軸方向無限遠で一樣引張力が作用し, ECF 部分で x, y 方向の変位成分 $u = v = 0$, その他の境界で応力自由としたとき, 求めたい複素応力関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を, $\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta)$, $\psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta)$ ($\varphi_0(\zeta)$, $\psi_0(\zeta)$ は大きさ P の一樣引張を表わす複素応力関数で, $\varphi_0(\zeta) = P/4 \cdot \omega(\zeta)$, $\psi_0(\zeta) = -P/2 \cdot \omega(\zeta)$)とすると, $\varphi_1(\zeta)$ が式(2)の形で与えられ, $H(\zeta)$ は,

$$H(\zeta) = -\frac{P}{4} \omega(\zeta) - \frac{P}{4} \sum_{k=1}^{25} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} - \frac{P}{2} E_0 \frac{\chi(\zeta)}{\chi(0)} \frac{1}{\zeta} + \frac{P}{4} E_0 \chi(\zeta) \quad (3)$$

$\varphi_1(\zeta)$ が求めれば $\psi_1(\zeta)$ は解析接続の原理より, $\psi_1(\zeta) = -\varphi_1(1/\zeta) - \overline{\omega(1/\zeta)} \cdot \varphi_1'(\zeta) / \omega'(\zeta)$ と求まる。

解析結果 式(1)に含まれるパラメーターをがえることによって、はく離の広さ、き裂長さを任意の長さにすることができる。図-2に、 $\kappa = 2$ (ポアソン比が平面ひずみで $1/4$, 平面応力で $1/3$) に対して、はく離が半周生じている場合の応力分布を示す。剛境界上の応力 σ_r と σ_θ には、 $\sigma_\theta / \sigma_r = (3 - \kappa) / (1 + \kappa)$ の関係がある。き裂先端、はく離先端で急激な応力集中がみられる。き裂の生じていない側の対称軸上の応力は応力緩和のようすがみられる。図-3に、無次元化した応力拡大係数 $F_I = K / P \sqrt{\pi c}$ とき裂長

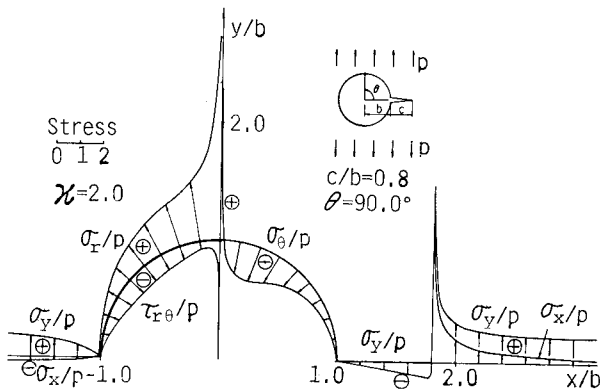


図-2 応力分布

さの関係を、はく離がない場合とはく離が境界全体にわたってある場合に対して示す。 $b/c \rightarrow 0$ のとき、剛体介在物の影響は弱くなり介在物がない場合の値 0.707 に近づく。 c/b が小さいときは剛体介在物の影響をうけ、 λ の値により違いが生じる。介在物と母材が同一材料のときは $F_I = 0.707$ である。介在物が一般の弾性体の場合の F_I は、介在物が母材より硬いときは剛体介在物の場合の値と 0.707 の間の値を、介在物が母材より軟かい場合は円孔の場合の値と 0.707 の間の値をとることになる。図-4 に、 F_I とはく離の広がり θ の関係をいくつかのき裂長さに対して示す。き裂が短いほどはく離の広がりによる影響が大きいことがわかる。次にはく離先端の応力特異性について考察する。図-5 に示すように、剛境界と応力自由境界のなめらかな接点を原点にとり接点近傍の応力成分を求めると $\gamma = \ln \kappa / (2\pi)$ 、 σ_x は、

$$\sigma_x = \frac{A_1}{r^{0.5}} \left\{ e^{-\gamma\theta} \left[\frac{3}{2} \cos\left(\gamma \log r - \frac{1}{2}\theta\right) - 3\gamma \sin\left(\gamma \log r - \frac{1}{2}\theta\right) + (2\gamma^2 + \frac{1}{2}\theta) \sin\theta \sin\left(\gamma \log r - \frac{3}{2}\theta\right) \right] + e^{\gamma\theta} \left[\frac{1}{2} \cos\left(\gamma \log r + \frac{1}{2}\theta\right) - \gamma \sin\left(\gamma \log r + \frac{1}{2}\theta\right) \right] \right\} + \frac{A_2}{r^{0.5}} \left\{ e^{-\gamma\theta} \left[-3\gamma \cos\left(\gamma \log r - \frac{1}{2}\theta\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\gamma \log r - \frac{1}{2}\theta\right) + (2\gamma^2 + \frac{1}{2}\theta) \sin\theta \cos\left(\gamma \log r - \frac{3}{2}\theta\right) \right] + e^{\gamma\theta} \left[-\gamma \cos\left(\gamma \log r + \frac{1}{2}\theta\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\gamma \log r + \frac{1}{2}\theta\right) \right] \right\} + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

となる。他の応力成分 σ_y 、 τ_{xy} についても同様の形の式が導かれる。式(4)において、 $r \rightarrow 0$ につれて応力が無限大になることを示す頂の係数 A_1 、 A_2 は応力拡大係数に相当する値と考えることができる。そこで、剛体円形介在物のはく離先端に対して、この A_1 、 A_2 値を写像関数と複素応力関数から求めた。図-6、7 には A_1 、 A_2 値を無次元化した値、 $I_1 = A_1 / \sqrt{p\sqrt{b}}$ 、 $I_2 = A_2 / \sqrt{p\sqrt{b}}$ のはく離の広がりに伴う変化をいくつかのき裂長さに対して示す。 I_1 、 I_2 値とともにき裂長さにかかわらず、だいたい一定のはく離の広がり極値をとることがわかる。

参考文献
[1] Hasebe, N.,
Ing.-Arch., 48
(1979), 51.

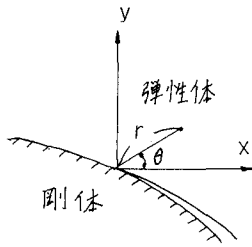


図-5

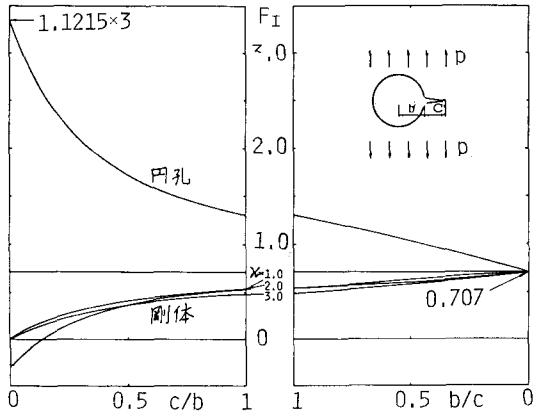


図-3 無次元化した応力拡大係数 F_I とき裂長さの関係

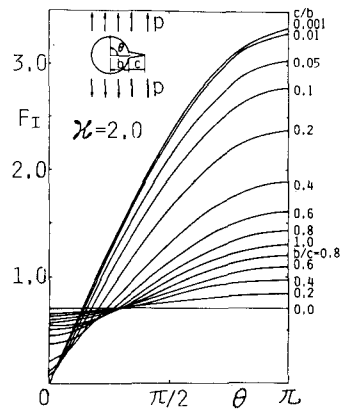


図-4 F_I とはく離の広がり θ の関係

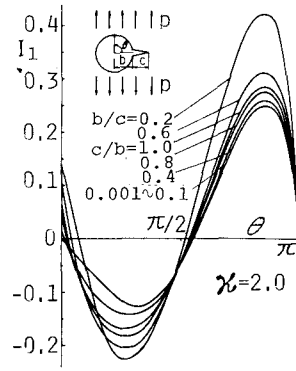


図-6 I_1 と θ の関係

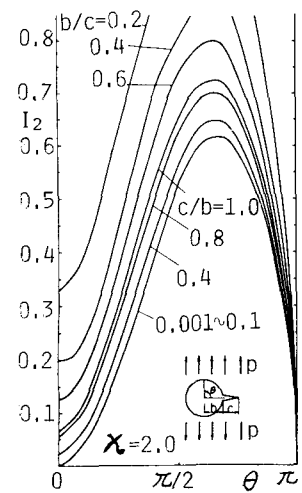


図-7 I_2 と θ の関係