

東京大学工学部 学生員 三賢容三
 東京大学工学部 正会員 三木千寿
 東京大学工学部 正会員 西野文雄

1. はじめに 1次元棒部材の有限変位問題における厳密な支配方程式は、3次元弾性論の有限変位問題における仮想仕事式から構造部材の1次元化という操作を経て組織的に得られている。⁽¹⁾⁽²⁾ この支配方程式を有限要素法により離散化する上での最も困難な点は、モーメントに対応する幾何学的境界条件が非線形になっていることである。しかしこの非線形な境界条件については詳しい考察はなされておらず、今までに発表されている殆どの研究がこの境界条件を線形なものとして取り扱っている。本報告では、この非線形な幾何学的境界条件を取り扱うため、非線形な形状関数を導入し支配方程式を導いた。その際、不明確な省略は一切行わなかった。そしてこの様にして得た支配方程式を反復法の1種である逐次近似法によって定式化した。さらにこの支配方程式の係数行列が支配方程式自身の接線剛性行列になっていることを、円弧アーチを例題として固有値解析を行い数値的に確かめた。ここではその詳細については触れないが、このことは、3次元弾性論の有限変位問題における増分仮想仕事式を用いることによって、1次元構造部材に対して共通に成り立つことが言える。

2. 支配方程式 仮想仕事式を記述するために、独立変数として棒部材の軸線上にも、それと直角方向にも取る。従属変数である位置パラメータとして、空間固定デカルト座標系における部材中の点の位置ベクトル成分 $x(\xi, \zeta)$, $y(\xi, \zeta)$ を用いる。初期形状が直線である1要素を考え、空間固定座標 X を変形後の部材軸に平行に選ぶと、文献(2)に表わされている仮想仕事式がさらに次の様な形になる。

$$\int_0^L EA \epsilon \delta X d\xi + \int_0^L N \frac{y'}{x} \delta y d\xi + \int_0^L EI K \frac{\delta y''}{x} d\xi + \int_0^L M \frac{y'' \delta x'}{(x)^2} d\xi = \int_0^L (\bar{P}_x \delta x + \bar{P}_y \delta y) d\xi - [(N - \bar{T}_x) \delta x + (\frac{M - \bar{m}}{x} - \bar{T}_y) \delta y + (M - \bar{m}) \delta \lambda]_{\xi=0}^{\xi=L} \quad (1)$$

$$N = EA \epsilon \quad M = -EI K \quad \lambda = \tan^{-1}(\frac{y'}{x}) = \frac{y'}{x}$$

ここに、 A は断面積、 I は断面2次モーメント、 ϵ は伸び歪、 K は曲率、 N は軸力、 M はモーメント、 $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$, $\bar{m}$ 及び $\bar{T}_x$, $\bar{T}_y$, $\bar{m}$ は体積力及び表面力を重心線上の合力に変換した力やモーメント、 λ は角度パラメータを表わしている。式(1)は1次元化を行った後の式であるので、そこに現われている x , y は $x(\xi, 0)$, $y(\xi, 0)$ を意味する。プライムは ξ による微分を表わす。式(1)の外力項に見られるように、幾何学的境界条件は

$$x = \bar{x} \quad y = \bar{y} \quad \frac{y'}{x} = \bar{\lambda} \quad (2)$$

とも表わされ、 $\bar{\lambda}$ に関する条件は非線形となっている。この境界条件を表わすため、形状関数としても非線形な関数を用いなければならない。ここで扱っている1次元問題では用いるべき形状関数は容易にみつき、次の形状関数を用いることによって幾何学的境界条件を厳密に満足させることができる。

$$x(\xi, 0) = \langle \varphi_1^1, \varphi_2^1 \rangle \times \langle x_1, x_2 \rangle^T \quad y(\xi, 0) = \langle \varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_3^3, \varphi_4^3 \rangle \times \langle y_1, \lambda_1, y_2, \lambda_2 \rangle^T \quad (3)$$

ここに φ_1^1 , φ_2^1 は ξ の1次関数、 φ_1^3 , φ_2^3 , φ_3^3 , φ_4^3 は ξ の3次関数である。 $\hat{x}$ は変形後の部材長 $x_2 - x_1$ であり、従って y は未知節点位置に関する非線形式である。式(3)を式(1)に代入することによって次の支配方程式を得る。

$$F = (K_{en} + K_{em} + K_{en} + K_{em}) X - F_0 \quad X = \langle x_1, y_1, \lambda_1, x_2, y_2, \lambda_2 \rangle^T \quad F_0 = EA \langle -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle^T \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 K_{EN} &= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} & K_{EN} &= \frac{EI(\ell/\hat{\ell})^2}{\ell^3(\hat{\ell})} \begin{bmatrix} 4(\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_4^2) & 0 & 0 & -4(\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_4^2) & 0 & 0 \\ & 12 & 6\hat{\ell} & 0 & -12 & 6\hat{\ell} \\ & & 4\hat{\ell}^2 & 0 & 6\hat{\ell} & 2\hat{\ell}^2 \\ & & & 4(\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_4^2) & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & -12 & -6\hat{\ell} \\ & & & & & 4\hat{\ell}^2 \end{bmatrix} \\
 K_{EN} &= N \frac{\ell}{\hat{\ell}} \begin{bmatrix} \frac{1}{15}(2\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_4^2) & 0 & 0 & -\frac{1}{15}(2\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_4^2) & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5}\hat{\ell} & \frac{8}{10}\hat{\ell} & 0 & -\frac{6}{5}\hat{\ell} & \frac{8}{10}\hat{\ell} \\ & & \frac{28}{15}\hat{\ell} & 0 & -\frac{8}{10}\hat{\ell} & -\frac{8}{30}\hat{\ell} \\ & & & \frac{1}{15}(2\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_4^2) & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \frac{6}{5}\hat{\ell} & -\frac{8}{10}\hat{\ell} \\ & & & & & \frac{28}{15}\hat{\ell} \end{bmatrix} & K_{EN} &= \frac{1}{\hat{\ell}^2} \begin{bmatrix} M_1\lambda_1 - M_2\lambda_2 & 0 & 0 & M_2\lambda_2 - M_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & M_1\lambda_1 - M_2\lambda_2 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

λ_1, λ_2 は節点たわみ角である。非線形な形状関数を用いた結果、従来の文献ではみられていない新たな行列として K_{EN} が現われたほかに、普通、微小変位行列及び幾何剛性行列と呼ばれている K_{EN}, K_{GN} の (1,1), (1,4), (4,1), (4,4) 成分に非零の成分が現われたこと、全般にわたって ℓ と $\hat{\ell}$ が混在して現われていることなどの違いが生じている。 K_{EN} はモーメントの伸びに対する影響を表わしている。ここに表わした行列は全て対称行列であるが、一般に連立非線形式を行列表示するとき、その表現はある程度の任意性を持っており、従って表現の如何によっては必ずしも対称行列とはならない。ここでは特に K_{EN} を表わすとき特別の工夫を必要とした。上に示した行列の対応する成分を比較し考察することによって次のことが言える。

- (1) 十分小さく要素を選び $\lambda_1, \lambda_2 \ll 1$ とする。このとき $N \ll EI/\ell\hat{\ell}$ であれば K_{EN} を無視することができる。
- (2) 十分小さく要素を選び $\lambda_1, \lambda_2 \ll 1$ とする。このとき $(M_1\lambda_1 - M_2\lambda_2)/\hat{\ell} \ll EI\hat{\ell}/\ell$ であれば K_{EN} を無視することができる。

3. 数値計算例 2で考察したこと、及び導いた支配方程式の係数行列が接線剛性行列に一致していることを示すために、Elastica 及び円弧アーチの問題を取り上げた。図1において、Aは単純ばりを4分割し K_{EN} を含めない場合、Bは8分割し K_{EN} を含めない場合、Cは4分割し K_{GN} を含めた場合の計算の結果を表わしている。縦軸に古典的座屈荷重との比を取っているが、この結果を見るとCの場合の計算の精度が最もよいことがわかる。さらにこの図から、要素分割数を多くして行くに従って K_{GN} の影響が逓減して行き、分割数を多くすればいずれも同じ解に収束することがわかる。図2において一点鎖線は係数行列の最低固有値を示している。係数行列が接線剛性行列と等しいならば、荷重変位曲線上の極限点において0固有値を持つ筈である。図2を見ると、実際に荷重の極限点において固有値が0になっていることがわかる。このことから係数行列が接線剛性行列に等しくなっていることが数値的に確かめられたと言える。

〔参考文献〕 (1) 西野・倉方・後藤、一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論、土木学会論文報告集、才237号・1975年5月
(2) 阿井・西野、離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用、土木学会論文報告集才304号・1980年12月

