

I-36 薄肉円弧ばりの近似理論に関する考察

早稲田大学大学院 学生会員 布山 裕之
 早稲田大学工学部 正会員 平嶋 政治
 早稲田大学工学部 正会員 依田 照彦

1. まえがき

従来、曲線橋などのいわゆる円弧ばりの設計においては、計算を簡便にするために曲線部材を直線部材の集合に置き換えるという手法が用いられている。しかし、直線部材間における曲げねじり現象の伝達機構が明確にされていない現在、従来の折れ線近似モデルで正確な応力を算定するのは困難である。本報告では、一次元棒理論に基づく薄肉円弧ばりの釣り合い方程式を基礎に、円弧ばりの曲率の変化による断面の中立点O、そり中心Sの移動および断面定数の変化を明確にしたうえで、釣り合い方程式により求まる解析解と応力レベルで比較したとき、妥当な近似値の得られる折れ線近似モデルを提案した。

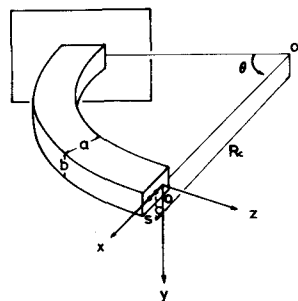


図1. 全体図 および座標系

2. 解析解

薄肉平面曲線部材の微小変位理論は面野・深沢¹⁾により統一的に定式化されている。その釣り合い方程式を本報告では使用した。

一般に、曲線部材においては $\Sigma x = \Sigma y = \Sigma \omega = \Sigma x = \Sigma y = 0$ ¹⁾ という主座標を用いたとしても、面内挙動と面外挙動は連成する。ここでは解析を容易にするために二軸対称断面を用いた。このとき、釣り合い方程式は面外挙動を支配する式と面内挙動を支配する式とに分かれる。

釣り合い方程式、断面力-変位関係から断面力を消去し、さらに分布荷重を零とすれば変位成分表示の面外の釣り合い方程式は以下のようなになる。

$$-\frac{EJ_x}{R_0 R_s^3} (U_s^{IV} + R_s \psi''') + \frac{EC_w}{R_s^5} (\psi^{IV} - \frac{U_s^{IV}}{R_s}) - \frac{GJ_{st}}{R_s^3} (\psi'' - \frac{U_s''}{R_s}) = 0 \quad (1. a)$$

$$-\frac{EJ_x}{R_0 R_s^2} (U_s'' + R_s \psi') - \frac{EC_w}{R_s^4} (\psi^{IV} - \frac{U_s^{IV}}{R_s}) + \frac{GJ_{st}}{R_s^2} (\psi'' - \frac{U_s''}{R_s}) = 0 \quad (1. b)$$

ただし、() は中心角θに関する微分を意味する。

この連立定数係数微分方程式を解き、ψ および U_s の一般解を求めた。数値計算例として、断面幅 a = 4.5 m、高さ b = 3.0 m、厚さ t = 2.0 cm の薄肉箱型断面を有する、部材長 l = 50 m、曲率半径 R_c = 10 × a の片持ち円弧ばりを用い、自由端の圆心 C に面外せん断力 Q_y = 10 ton を載荷させた。なお、材料定数は弾性係数 E = 2.1 × 10⁶ kg/cm²、ポアソン比 ν = 0.30 とした。

本報告で用いた断面の断面定数と曲率半径の関係を扇形慣性モーメント C_w を例にとり、図2に示した。また、図3は曲率半径の変化に伴う断面の中立点O、そり中心Sの移動を示している。

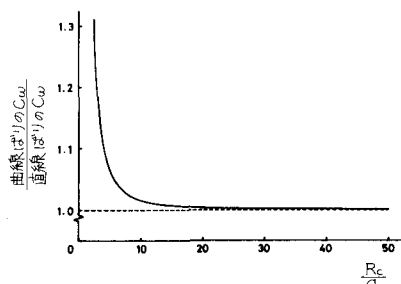


図2. 扇形慣性モーメント C_w と曲率半径の関係

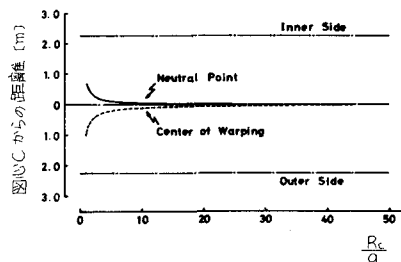


図3. 曲率半径の変化に伴う中立点O、そり中心Sの移動

3. 近似解

通常、近似解を得る手法として直接剛性法が用いられている。従来の一次元直線部材の曲げとねじりに関する剛性マトリックス²⁾は、

$$EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} = q_y \quad (2. a)$$

という曲げの釣り合い方程式と曲げねじりを考慮しないねじりの釣り合い方程式

$$GJ_{st} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -m_z \quad (2. b')$$

より作成されている。本報告の折れ線近似モデルでは要素剛性マトリックスとして、(2. b')式の代わりに薄肉直線部材のねじりの釣り合い方程式

$$EC_w \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GJ_{st} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = m_z \quad (2. b)$$

より作成したものを使用した。個々の要素剛性マトリックスを重ね合わせて全体剛性マトリックスを作成する際に、バイモーメント M_w および $d^4 \varphi / dz^4$ の座標変換が問題となるが、いろいろ試みた結果、座標変換マトリックスの M_w および $d^4 \varphi / dz^4$ に相当する要素に1を入れたとき M_w 、 $d^4 \varphi / dz^4$ は円弧ばりのものに非常に良く似た挙動を示すことが判明したので、座標変換を受けないとした。なお、 $R_c/a = 10$ では円弧ばりの断面定数はほぼ直線ばりのものに一致し(図2)、また、断面の中立点 O および重心 S はほぼ断面の圆心 C に一致するので(図3)、折れ線近似モデルでは直線ばりの断面定数を使用し、点 O および点 S を点 C に一致させた。

4. 解析解と近似解の比較

本報告で提案した折れ線近似モデルの妥当性を示すために、先に示した片持ち円弧ばりの自由端に \bar{Q}_y を載荷させたときの数値計算結果を示した(図4~6)。図中においては曲線は解析解を表しプロットは5要素折れ線近似モデルの値である。このとき M_w による応力に若干の誤差がみられるが、分割数を増やすことによりかなり改善されること、さらにはI型断面の方がより良い近似の得られることが判明した。詳しくは講演会当日に発表する。

5. あとがき

本報告では、薄肉円弧ばりの面外の釣り合い方程式に着目し、微分方程式を厳密に解くことにより解析解を求め、この解析解と比較し妥当な値の得られる折れ線近似モデルを提案した。折れ線近似モデルにおける M_w および $d^4 \varphi / dz^4$ の座標変換については理論的に不明瞭な点があるが、簡便で良い近似が得られる点で本報告の折れ線近似モデルは優れていると思われる。

なお、数値計算は東京大学大型計算機センターのM-200Hを使用して行った。

参考文献

- 1) 西野・深沢：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化、土木学会論文報告集 第247号、1976年3月
- 2) H. C. マーチン：マトリックス法による構造力学の解法、培風館、1967年

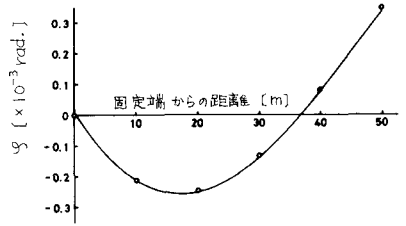


図4. 面外せん断力 \bar{Q}_y 載荷時の断面の回転変位 φ

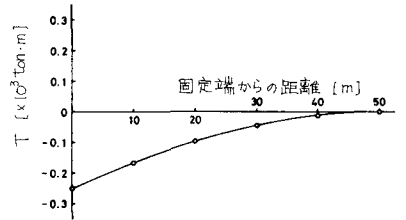


図5. 面外せん断力 \bar{Q}_y 載荷時のねじりモーメント T

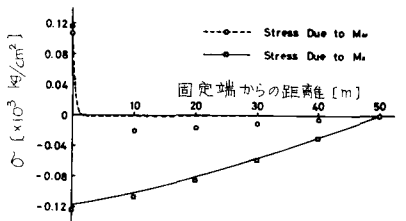


図6. \bar{Q}_y 載荷時の隅角部(外側ウェブと下フランジの交線)における垂直応力 σ