

名古屋大学工学部 ○ 学生員 山元 俊哉  
正 員 馬場 俊介

## 1. まえがき

構造部材のねじりを伴う挙動の解析にあたっては、ねじり剛性の評価が問題になる。たとえば、矩形断面の場合には、マッシュであるという理由で、ねじりの影響を無視してしまう。あるいは、I形断面の場合には、薄肉構造であるという理由で肉厚方向のそり関数の変化を無視してしまい、肉厚中心線上のそり関数を用いることに相当するねじり剛性により、断面のねじり特性を評価している。ここでは、このような近似によらずに、St. Venantのねじりに関するLaplaceの微分方程式をGalerkin有限要素法により解き、断面についてそり関数を求めることを試みた。さらに、このようにして得られたそり関数の値を用いて、はりの非線形解析(弾塑性・有限変形)を行う。

## 2. はりの非線形解析

はりの解析を行うにあたり、取扱う断面は2軸対称断面とし、矩形断面、I形断面、中空矩形断面の3種類を考える。座標軸を図-1のように設定し、部材軸方向にx軸をとる。断面の重心Oのx, y, z方向の変位をそれぞれ $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ , 回転角を $\bar{\theta}$ , 断面のそり関数を $\varphi(y, z)$ と表示すれば、断面内の任意点(y, z)の変位はつぎのように表わされる。

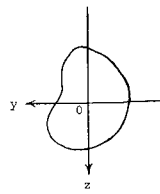


図-1

$$u = \bar{u} - y(\bar{v}_{xx} \cos \bar{\theta} + \bar{w}_{xx} \sin \bar{\theta}) - z(\bar{w}_{xx} \cos \bar{\theta} - \bar{v}_{xx} \sin \bar{\theta}) + \varphi \bar{\theta}_{xx}$$

$$v = \bar{v} - z \sin \bar{\theta} - y(1 - \cos \bar{\theta})$$

$$w = \bar{w} + y \sin \bar{\theta} - z(1 - \cos \bar{\theta})$$

ここで、下付き記号 $_{xx}$ はxについての偏微分を表わす。

一方、はりの中立軸変位 $u, v, w, \theta$ は、図-2に示すような3節点のはり要素に分割すると、節点変位 $u^*, v^*, w^*, \theta^*$ を用いて、つぎのように補間することができる。

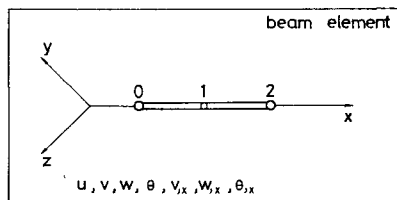


図-2

$$u = \{N_u\}^T \{u^*\}, \quad v = \{N_v\}^T \{v^*\}$$

$$w = \{N_w\}^T \{w^*\}, \quad \theta = \{N_\theta\}^T \{\theta^*\}$$

ここで、 $\{N_u\}$ は2次の補間関数、 $\{N_v\}$ ,  $\{N_w\}$ ,  $\{N_\theta\}$ は3次の補間関数である。節点変位は、 $\{u^*\}^T = \{\bar{u}_0^* \ \bar{u}_1^* \ \bar{u}_2^*\}$ ,  $\{v^*\}^T = \{\bar{v}_0^* \ \bar{v}_{x0}^* \ \bar{v}_2^* \ \bar{v}_{x2}^*\}$ ,  $\{w^*\}^T = \{\bar{w}_0^* \ \bar{w}_{x0}^* \ \bar{w}_2^* \ \bar{w}_{x2}^*\}$ ,  $\{\theta^*\}^T = \{\bar{\theta}_0^* \ \bar{\theta}_{xx0}^* \ \bar{\theta}_2^* \ \bar{\theta}_{xx2}^*\}$ のように定義される。添字の0, 1, 2は図-2に示すように、はり要素の節点、右肩の記号\*は無次元量を意味する。

式(1), 式(2)を利用して、内力による増分仮想仕事は、つぎのように表わされる。

$$\delta \dot{W}^* = \{\delta \dot{u}^*\}^T [K_u] \{\dot{u}^*\}$$

ここで、 $\{\dot{u}^*\}^T = \{\dot{\bar{u}}_0^* \ \dot{\bar{u}}_1^* \ \dot{\bar{u}}_2^* \ \dot{\bar{\theta}}_0^* \ \dot{\bar{\theta}}_{xx0}^* \ \dot{\bar{\theta}}_2^* \ \dot{\bar{\theta}}_{xx2}^* \ \dot{\bar{v}}_0^* \ \dot{\bar{v}}_1^* \ \dot{\bar{v}}_2^* \ \dot{\bar{v}}_{x2}^* \ \dot{\bar{w}}_0^* \ \dot{\bar{w}}_1^* \ \dot{\bar{w}}_2^* \ \dot{\bar{w}}_{x2}^* \ \dot{\bar{\theta}}_{xx2}^*\}$ であり、 $[K_u]$ は要素剛性行列(15×15)である。

一方、各節点に作用する外力による増分仮想仕事は、増分節点荷重を $\{\dot{F}_{\text{apply}}^*\}$ とすると、

$$\delta \dot{W}^* = \{\delta \dot{u}^*\}^T \{\dot{F}_{\text{apply}}^*\}$$

となり、式(3)と式(4)を等しいとおくことにより、増分つり合い方程式

$$[K_u] \{\dot{u}^*\} = \{\dot{F}_{\text{apply}}^*\}$$

を得る。ところが、実際に節点に作用している荷重 $\{\dot{F}_{\text{exact}}^*\}$ は、仮想仕事の原理よりつぎのように与えられる。

$$\{F_{\text{exact}}\} = \iint [\sigma_x (\partial \varepsilon_x / \partial u^*) + \tau_{xy} (\partial \varepsilon_{xy} / \partial u^*) + \tau_{xz} (\partial \varepsilon_{xz} / \partial u^*)] dA^* dx^*$$

この  $\{F_{\text{Apply}}\}$  と  $\{F_{\text{exact}}\}$  を Original Newton-Raphson 法によって反復収束させることにより、弾塑性・有限変形といった非線形問題を解く。

### 3. Galerkin 有限要素法による定式化

そり関数を求めるために、部材断面を矩形要素に分割して、要素の各節点におけるそり関数の値を求める。断面内の1要素を図-3に示す。要素は局部座標系  $(\bar{y}, \bar{z})$  で定義されている。このとき、そり関数の満足すべき基本式はつぎのような Laplace 形の微分方程式になる。

$$\partial^2 \bar{\varphi} / \partial \bar{y}^2 + \partial^2 \bar{\varphi} / \partial \bar{z}^2 = - (1/\bar{D}_x) (\partial \bar{\tau}_{xy} / \partial \bar{y} + \partial \bar{\tau}_{xz} / \partial \bar{z}) = - \bar{Q}_1$$

境界条件については、境界部が  $y$  軸もしくは  $z$  軸に平行な場合に限定す。

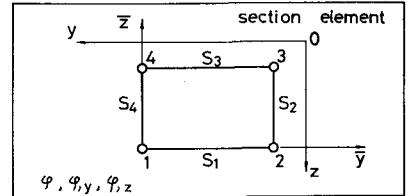


図-3

ここで、全体座標系の  $y^*, z^*$  と局部座標系  $\bar{y}, \bar{z}$  との関係は、 $y_i^*, z_i^*$  を節点1の座標値とすると、  
 $y^* = y_i^* + a - \bar{y}$  ,  $z^* = z_i^* + b - \bar{z}$

となる。そり関数を  $\bar{\varphi} = \{N_i\}^T \{\bar{\varphi}\}$  と補間式により近似する。ここで、 $\{\bar{\varphi}\}$  は矩形要素の各節点における  $\varphi, \varphi_y, \varphi_z$ 、 $\{N_i\}$  は3次の補間関数である。これを式(5)に代入して、Galerkin法により、積分方程式の形で表わし、Green の定理を応用して境界積分の項を分離すると、

$$\begin{aligned} & - \int \left[ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{y}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{y}} \right\} + \frac{\partial N_i}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{z}} \right\} \right] \{\bar{\varphi}\} dR + \int N_i \bar{Q}_1 dR \\ & - \int_{S_1} N_i \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{z}} \right\} \{\bar{\varphi}\} dS_1 + \int_{S_2} N_i \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{y}} \right\} \{\bar{\varphi}\} dS_2 + \int_{S_3} N_i \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{z}} \right\} \{\bar{\varphi}\} dS_3 - \int_{S_4} N_i \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \bar{y}} \right\} \{\bar{\varphi}\} dS_4 = 0 \end{aligned}$$

となる。さらにマトリクス表示をすれば、 $[K_\varphi] \{\bar{\varphi}\} = \{Q\}$  となるが、ここに、 $[K_\varphi]$ 、 $\{\bar{\varphi}\}$ 、 $\{Q\}$  はそれぞれつぎのようなものである。

$$\begin{aligned} [K_\varphi] : K_{ij} &= \int_R \left\{ \left( \frac{\partial N_i}{\partial \bar{y}} \right) \left( \frac{\partial N_j}{\partial \bar{y}} \right) + \left( \frac{\partial N_i}{\partial \bar{z}} \right) \left( \frac{\partial N_j}{\partial \bar{z}} \right) \right\} dR \\ \{Q\} : Q_{j1} &= \int_{S_1} N_j \bar{y} dS_1, Q_{j2} = \int_{S_2} N_j \bar{z} dS_2, Q_{j3} = \int_{S_3} N_j \bar{y} dS_3, Q_{j4} = \int_{S_4} N_j \bar{z} dS_4 \end{aligned}$$

矩形要素の境界がはりの外縁と一致する場合には、 $Q_{j1}, \dots, Q_{j4}$  が計算され、それ以外の場合は0である。

### 4. 数値計算例

数値計算例の1つとして、中空矩形断面はりに純ねじりが作用する場合の解析を行う。図-4は、ねじりモーメントと回転角の変化の様子を表わしたものであり、図-5は断面内(1/4)のそり関数の値の分布を、視覚的にわかりやすくするため拡大して図示したものである。

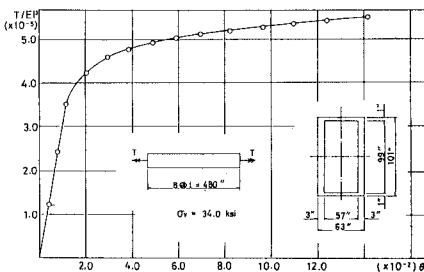


図-4

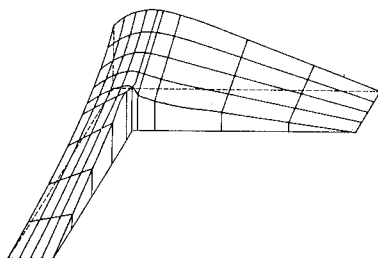


図-5

- 参考文献 1) Baba, S & T. Kajita, Out-of-Plane Deformation of Steel Frame in Fire, 1st. Conf. on Computers in Civil Eng., 1981.5  
 2) 山元 俊哉, そり関数を用いた任意形状断面の有限要素解析, 名古屋大学提出卒業論文, 1981.3