

豊田高専 正員 桜井孝昌
東京大学工学部 正員 西野文雄

1. まえがき 構造物の有限変位解析を行う場合、その変形に応じて多くの極限点や分岐点が存在する。工学的には、それらのうちの最小荷重に対する極限点あるいは分岐点を確実に解析することが必要である。

本報告は、シェル構造物の幾何学的非線形問題を対象とし、各々の荷重段階における変形状態を計算すると同時に、固有値解析を行い特異点の存在を確かめた。

2. 数値計算の方法 物体内の任意の点の挙動は、Lagrangeの方法により表わす。数値計算は有限要素法を用い、曲面は三角形板要素の集合で近似させる。支配方程式は剛体変位を除去した線形の荷重-変位関係を利用して作った全荷重-全変位関係式を用い、数値計算は逐次代入法により行う^(1,2)。以下その方法について説明する。物体内の節点変位を $\mathbf{U}$ とする。

この変位は変形後の節点を結んでできる平面上の座標系を基準として測られる微小な弾性節点変位 $\mathbf{u}$ と、そこに至るまでの剛体変位 $\mathbf{R}$ を用いて表わすと、

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{R} \quad (1)$$

節点に作用する外力 $\mathbf{F}$ と、微小変位 $\mathbf{u}$ とは、剛体変位 $\mathbf{R}$ を定数と見なせば、定数係数からなる剛性マトリックス $\mathbf{K}$ により次式のように関係づけられる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (2)$$

式(1)の $\mathbf{u}$ を式(2)へ代入すると、

$$\mathbf{F} + \mathbf{K} \mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (3)$$

式(3)の $\mathbf{R}$ に仮に定めた初期値を代入することにより $\mathbf{U}$ を求め、この $\mathbf{U}$ を用いて $\mathbf{R}$ を修正し、再び $\mathbf{U}$ を求めることを繰り返して、 $\mathbf{U}$ が収束するまで演算する。

3. 固有値解析について 微小変位弾性理論による平板の剛性マトリックスを $\mathbf{K}_E$ とし、線形座屈解析に用いられる平板の幾何剛性マトリックスを $\mathbf{K}_G$ とする。式(2)における剛性マトリックス $\mathbf{K}$ として、 $\mathbf{K}_E$ を用いても解は求まるが、 $\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$ を用いた方が少ない要素分割で精度の良い解が得られる。

式(2)における外力ベクトル $\mathbf{F}$ を次式のように表わす

$$\mathbf{F} = f \cdot \mathbf{f} \quad (4)$$

式(4)の f は、外力の大きさを表わすスカラー量であり、 $\mathbf{f}$ は一定の外力ベクトルとする。式(4)を式(3)に代入し、 f 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{R}$ を定数と見なし微分すると、

$$df \cdot \mathbf{f} = \mathbf{K} d\mathbf{U} \quad (5)$$

の関係が得られ、解が収束した段階において $\mathbf{K}$ は接線剛性ベクトルとなっている。座標として直交デカルト座標を用いるものとし、局所座標系は $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 、 $\bar{z}$ 、全体座標系は x 、 y 、 z で表わすとすると、式(5)における $\mathbf{K}$ は、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_G = N_{\bar{x}} K_{gx} + N_{\bar{y}} K_{gy} + N_{\bar{z}} K_{gzy} \quad (7)$$

と表わされる。式(7)における $N_{\bar{x}}$ 、 $N_{\bar{y}}$ 、 $N_{\bar{z}}$ はそれぞれ平板内の $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 、 $\bar{z}$ 方向の面内応力を表わし、 $N_{\bar{z}}$ はせん断応力を表わし外力 $\mathbf{F}$ に応じて変化する。 K_{gx} 、 K_{gy} 、 K_{gzy} は、全体座標系に変換した $N_{\bar{x}}$ 、 $N_{\bar{y}}$ 、 $N_{\bar{z}}$ に対応する幾何剛性マトリックスである。

式(5)より、

$$|\mathbf{K}| = 0 \quad (8)$$

が成り立つとき、この変形状態は分岐点か荷重の極限となっている。この場合 $f \neq 0$ で

$$\left. \begin{aligned} df = 0 & \cdots \text{荷重の極限点} \\ df \neq 0 & \cdots \text{分岐点} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

数値計算は各々の外力に対応する変位 $\mathbf{U}$ を求めると同時に、各荷重段階の $\mathbf{K}$ を用いて標準形の固有値解析

$$|\mathbf{K} + \lambda \mathbf{e}| = 0 \quad (10)$$

を行った。式(10)の $\mathbf{e}$ は単位ベクトルを表わす。求まった固有値のうち零となるものが存在する場合、式(8)が成り立っていることになる。

4. 数値計算例 図-1は式(3)の剛性マトリックス $\mathbf{K}$ として $\mathbf{K}_E$ を用いた場合と $\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$ を用いた場合の比較である。図に示したような折板を2軸対称として計算し、横軸に中央点の鉛直下方変位 δ を、縦軸に中央点の集中荷重 P をとったものである。分割数の増加に従って一定値に収束しているが、 $\mathbf{K}$ として $\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$ を用いた方が収束が早いことを示している。

図-2は等分布荷重が載荷する面内2ヒンジアーチの座屈曲線である。横軸にアーチ中央点の鉛直下方変位を、縦軸に分布荷重強度 q をとったものである。実線は荷重-変位曲線を、破線はそれぞれの変形状態に対応する固有値を示したものである。固有値のうち λ_1, λ_2 は対称座屈に対する第1および第2固有値、 μ_1 は分岐座屈後の第1固有値を表わす。 λ_1 が零となる点が分岐点であり、 λ_2 が零となる点が対称座屈の荷重の極限点であることを示している。

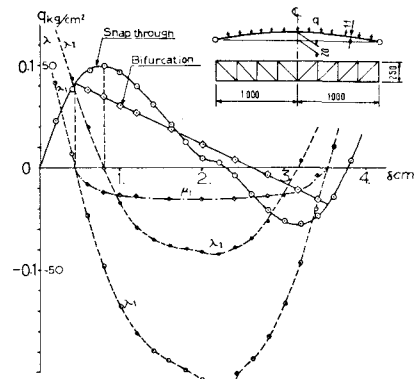


図-2 面内アーチの変形と固有値

図-3は軸方向圧縮力が作用する円筒シェルの荷重変位曲線である。両端単純支持とし、 $1/8$ 対称として解析した。横軸に図に示す節点②の軸方向変位を、縦軸に軸方向荷重をとったものである。図には変形No.1からNo.3までの3種類の変形曲線と、それぞれに対応する固有値を示した。変形No.1に対応する固有値のうち第1固有値から第4固有値までを λ_1 から λ_4 で、示し分岐後の変形No.2に対応する第1固有値は μ_1 で示した。点Aは分岐点であり、 λ_1 と λ_2 が同時に零となっている。このことは、この点で同時に2つの座屈形が存在することを示している。図に示したように点AからNo.2およびNo.3の2つの変形形状で分岐している。

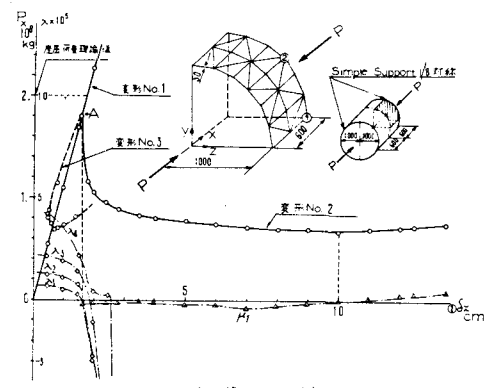


図-3 軸圧縮力が作用する円筒シェルの荷重変位曲線と固有値

図-4はこの変形状態をさらに分析するため、横軸に節点①および②の軸方向変位をとり、縦軸に軸方向荷重をとって図-3に示した変形状態を立体座標上に表わしたものである。変形No.2とNo.3は、一点鎖線で示した平面上の対称軸に関して対称となっている。これは図-5に示した円筒の対称横断面における変形が、 y, z 軸および y, z 軸に関して対称となっているためである。物理的には変形No.2とNo.3は同じ変形状態を表わしていることになる。

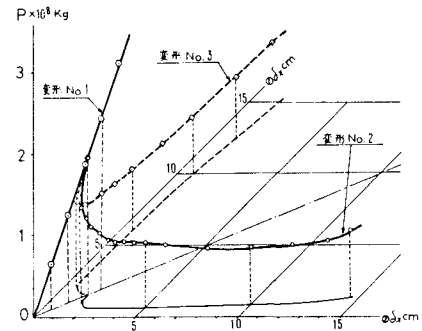


図-4 軸圧縮力が作用する円筒シェルの荷重変位曲線

数値計算は豊田高専端末より、名大大型計算機センターFACOM M-200を使用した。

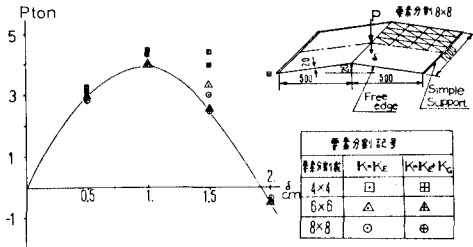


図-5 折端の変形 $K=K_0$ とした場合と、 $K=K_0+K_e$ とした場合の比較

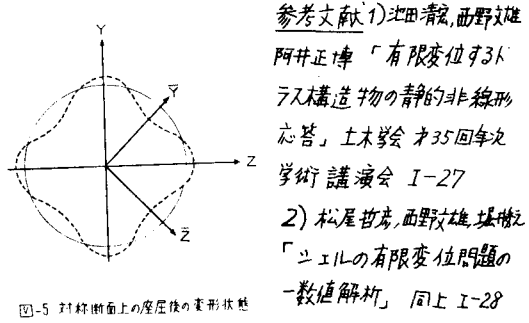


図-5 対称断面上の座屈後の変形状態

参考文献 1) 北田清宏, 西野文雄, 阿井正博 「有限変位するトラス構造物の静的非線形応答」 土木学会 第35回年次学術講演会 I-27
2) 松屋哲彦, 西野文雄, 堀内「シェルの有限変位問題の数値解析」 同上 I-28