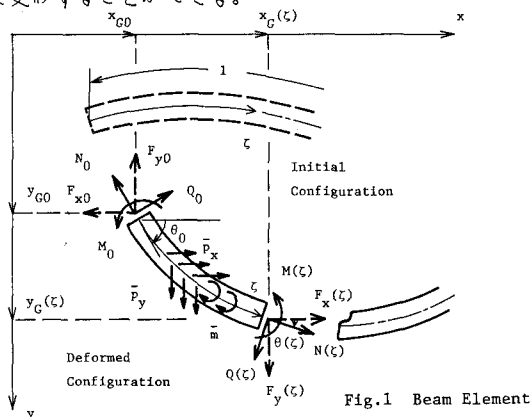


法政大学 正会員 阿井正博
東京都立大学 学生員 ○ 村上 淳

1. はじめに 微小変位問題での伝達マトリックス法は、適用範囲に限界があるものの、ループ数の少ないはり構造物を比較的小さいマトリックスで扱える等の利点がある。本文では、伝達マトリックス法の考え方を面内曲げ有限変位問題で拡大展開するものであり、伝達関数法と呼んでいる。

2. 初期値問題としての展開 面内曲げ有限変位問題の基礎方程式¹⁾を本文での展開に沿うように次のように変形することができる。



初期曲率 $x_0(z)$ 、長さ l の曲線はりを考え、その伸び剛性と曲げ剛性をそれぞれ $\alpha(z)$ 、 $\beta(z)$ と表わす。ただし、 z は初期重心線に沿った物体固定座標である。はりの始端の $\{x, y\}$ 方向の力を $\{F_x, F_y\}_0$ 、分布外力を $\{\bar{P}_x(z), \bar{P}_y(z)\}$ とすれば、たわみ角を $\theta(z)$ として (Fig. 1)、断面の軸力 $N(z)$ とせん断力 $Q(z)$ に関するつり合い式は

$$\{N, Q\} = [T_q] \{F_x, F_y\} \quad (1)$$

$$\{F_x(z), F_y(z)\} = \{F_x, F_y\}_0 - \int_0^z \{\bar{P}_x, \bar{P}_y\} dz \quad (2)$$

$$[T_q(z)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

と表わされる。また、軸力に関する構成方程式と幾何学的関係より、重心線のつり合い形状 $\{x_q(z), y_q(z)\}$ に関して

$$\{x'_q, y'_q\} = [T_q]^T \left\{ 1 + \frac{N}{\alpha}, 0 \right\} \quad (4)$$

が成立する。ここに、記号 $(\prime)$ は z に関する微分を意味する。さらに、曲げモーメント $M(z)$ に関する構成方程式とひずみ-変位関係より

$$M = -\beta(\theta' - \kappa_0) \quad (5)$$

の関係があり、伸び変形を受けた微小はり要素のモーメントのつり合いより

$$M' = \left(1 + \frac{N}{\alpha}\right) Q + \bar{m} \quad (6)$$

の関係もある。ここに、 $\bar{m}(z)$ は分布外力モーメントを表わす。

断面の状態量 $e = \{N, Q, M, x_q, y_q, \theta\}$ の始端値 e_0 が与えられるはりの変形の初期値問題と考えると、既知関数 $\kappa_0(z), \{\bar{P}_x(z), \bar{P}_y(z)\}, \bar{m}(z)$ と状態量の初期値 e_0 を用いて、未知関数である e の $z=0$ での各階微係数を次のように誘導することができる。

式(3)の直交変換マトリックス $[T_q]$ の z に関する微分は、式(5)の関係を用いて、

$$\frac{d}{dz} [T_q] = \frac{M^*}{\beta} [E_q] \quad (7)$$

$$[E_q(z)] = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$M^* = M - \beta \kappa_0 \quad (9)$$

の形で表わすことができ、マトリックス演算での

$$[E_q] \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = [T_q] \begin{Bmatrix} -B \\ A \end{Bmatrix}, \quad ([E_q]^T \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = [T_q]^T \begin{Bmatrix} B \\ -A \end{Bmatrix}) \quad (10)$$

の関係より、式(1)、(3)の微分は、

$$\frac{d}{dz} \left([T_q] \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \right) = [T_q] \left(\begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix} + \frac{M^*}{\beta} \begin{Bmatrix} -B \\ A \end{Bmatrix} \right) \quad (11)$$

の形で表わされることになる。

式(1)の $\{N(z), Q(z)\}$ の1階微係数は式(11)の形で求まり、 M' は式(6)で表わされる。さらに高階の $\{N(z), Q(z), M(z)\}$ の微係数も、式(1)、(6)の各階微分式の中に先に得られているより低次の微係数表示を代入して $\{N, Q, M, x_q, y_q, \theta\}$ に関する有理式として循環的に展開することができる。同様にして、 $\{x_q(z), y_q(z), \theta(z)\}$ の各階微係数も、式(4)、(5)、(6)の各階微分式で式(11)の関係を考え前述の $\{N, Q, M\}$ の微係数表示を

代入することにより、状態量に関する有理式として順次求めることができる。

初期値問題では $z=0$ での状態量を与えられることより、以上の展開より e の各階微係数も $z=0$ で既知となり、 $z=0$ まわりでの Taylor 展開表示のもとに状態量の分布を近似的に表現することができる。分布外力がなく初期曲率一定 $K_0 = \text{const.}$ で重心線の不伸長 $\alpha = \infty$ の条件のもとでの展開、例えば $\{x_G(z), y_G(z)\}$ の n 階微係数までの結果は以下のようである。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_G(z) \\ y_G(z) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix}_0 + [T_G]^T \cdot \left(\begin{Bmatrix} 1 + \frac{N}{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}_0 z \right. \\ &+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M^*}{\beta} \end{Bmatrix}_0 \frac{z^2}{2!} + \begin{Bmatrix} -(\frac{M^*Q}{\beta}) \\ -\frac{Q}{\beta} \end{Bmatrix}_0 \frac{z^3}{3!} + \begin{Bmatrix} -\frac{3M^*Q}{\beta^2} \\ (\frac{M^*}{\beta})^2 - \frac{M^*N}{\beta^2} \end{Bmatrix}_0 \frac{z^4}{4!} \\ &+ \begin{Bmatrix} (\frac{M^*}{\beta})^2 - 4(\frac{M^*}{\beta})\frac{N}{\beta} - 3(\frac{Q}{\beta})^2 \\ 7(\frac{M^*}{\beta})^2\frac{Q}{\beta} - \frac{NQ}{\beta^2} \end{Bmatrix}_0 \frac{z^5}{5!} \\ &\left. + \begin{Bmatrix} 15(\frac{M^*}{\beta})^3\frac{Q}{\beta} - 15\frac{M^*NQ}{\beta^2} \\ -(\frac{M^*}{\beta})^5 + 11(\frac{M^*}{\beta})^3\frac{N}{\beta} - \frac{M^*N^2}{\beta^2} + 18\frac{M^*Q^2}{\beta^3} \end{Bmatrix}_0 \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \end{aligned}$$

----- (12)

ただし、1 階微係数中の $\frac{M^*}{\beta}$ を付した項は、不伸長の結果に付加した伸び変形の線形項である。¹⁾ e_0 に対して任意点の状態量 $e(z)$ を表わす前述の Taylor 展開のもとでの関数関係

$$e(z) = F(z; e_0) \quad \text{----- (13)}$$

は、はりの初期値問題に直接適用される。このとき、Taylor 展開の幅 z が大きくなれば誤差は大きくなるが十分小さいはり要素に分割して要素ごとの Taylor 展開を連続させれば誤差は大幅に改善され、節点での折れ曲がり、集中外力等も考慮して任意の曲線はりの有限変位問題を扱うことができる。

3. 境界値問題への適用 両端で支持されるはりの問題は、両端で 3 自由度づつを拘束される境界値問題であり、式 (13) に繰り返し計算を考慮して解くことができる。状態量を $S = \{F_x, F_y, M, x_G, y_G, \theta\}$ に変換して前述の要素分割による一般性をもたせた式 (13) と同等の関係を

$$S_l = E(l; S_0) \quad \text{----- (14)}$$

と表わし、その微分関係 (接線伝達マトリックス) を

$$\delta S_l = [S(l; S_0)] \cdot \delta S_0 \quad \text{----- (15)}$$

と表わす。 S_0 中の拘束されない 3 自由度 S_0^* に仮定値を与え、対応する S_l 中の拘束される 3 自由度 S_l^*

の指定値 S_l^* からの誤差に対して、 $[S]$ の S_0^* と S_l^* に対応する 3×3 の小マトリックス $[S^*(l; S_0^*)]$ を用いて、 $S_0^*[k]$ を

$$S_0^*[k+1] = S_0^*[k] - [S^*]_{[k]}^{-1} (S_l^*[k] - S_l^*) \quad \text{--- (17)}$$

と修正する Newton-Raphson 法により収束値を得ることが期待される。ここに $[k]$ は繰り返し回数を表わす。

4. 数値計算例 Fig. 2 に示すスパン 1.7 m、高さ 0.3 m、曲げ剛性 $1.4175 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、伸び剛性 $1.89 \times 10^6 \text{ kg}$ の折れ曲がりはりの節点 7 の鉛直荷重 P_y に対するつり合い形状を求めた。微小変位理論で節点 7 の 2 m の鉛直変位に相当する $P_y = 80.360 \text{ kg}$ を Table 1 に示す 3 段階に分割して計算した。つり合い形状を Fig. 3 に示す。

$P_y \text{ (kg)}$	$v \text{ (m)}$	No. of Iteration
32.144	0.4799	8
56.252	0.5779	8
80.360	0.6093	7

Table 1 Load Step

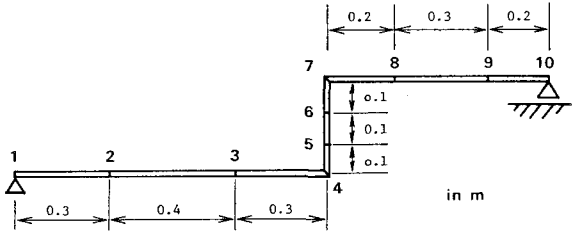


Fig. 2 Initial Configuration

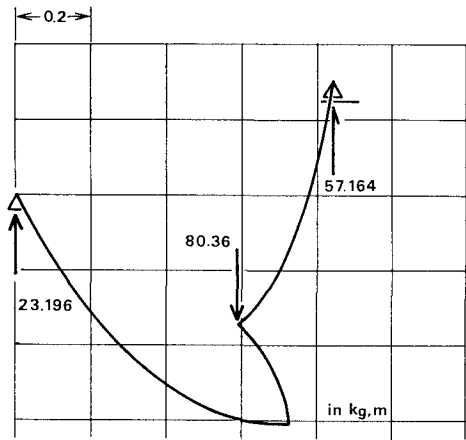


Fig. 3 Equilibrium Configuration

参考文献；1) 阿井正博, 西野文雄：離散化の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用、土木学会論文報告集, No. 304, PP. 17 ~ 32, 1980-12