I-30　有限変形を考慮した梁・平板の解析理論の定式化

山梨大学・工学部　正員　平島健一

1. 緒言.

幾何学的な非線形性を考慮した平板理論として，von Kármán理論が有名であるが，その後この理論の拡張や数値計算例に対する研究成果が極めて多数発表され，それらをまとめた成書も最近出版されている。[1]　さらに最近の研究傾向としては，均質な等方性板から異方性・層状性の平板や複雑な境界条件や荷重条件の問題に対する取扱いへと拡がってきている。　本文ではそれらの取扱いを梁・平板を含めて統一的に把握することを目的とし，三次元弾性論を立脚点として，時間依存性を有する三次元変位 $u_j,(j=1,2,3)$ を厚さ方向の座標 x_2 に関してべき級数に展開することによって，非線形性を考慮すると共に静的・動的な解析理論の定式化を試みる。ここで得られた結果に対して従来までに発表された梁・平板に対する主たる研究結果との関連について記述することを目的としたものである。

2. 理論式の誘導.

ここでは，平板の問題に対する定式化について記述するが，梁の問題の場合は得られた結果を特殊化してやればよい。(後述参照)

まず，座標系として図-1のような直交デカルト系 (x_1, x_2, x_3) を採用し，三次元変位 u_j を板厚方向座標 x_2 に関して式(1)のようにべき級数に展開できるものと仮定する。

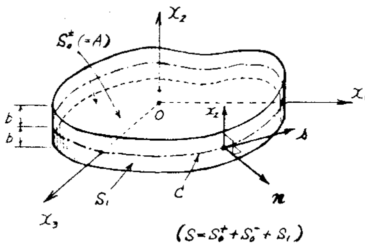

図-1 平板の幾何形状と座標系

$$u_j(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{n=0}^{\infty}x_2^{n}\cdot u_j^{(n)}(x_1,x_3,t)\quad,\quad(j=1,2,3)\cdots\cdots(1)$$

これより，非線形性を完全に考慮したGreenのひずみテンソル e_{ij} は変位係数 $u_j^{(n)}$ を用いて次式のように求められる。

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x_2^{n}\{\delta_{j\alpha}u_{i,\alpha}^{(n)}+\delta_{i\alpha}u_{j,\alpha}^{(n)}+(n+1)(\delta_{j2}u_i^{(n+1)}+\delta_{i2}u_j^{(n+1)})\}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x_2^{n+m}\{\delta_{i\alpha}u_{k,\alpha}^{(n)}+\delta_{i2}(n+1)u_k^{(n+1)}\}\{\delta_{j\beta}u_{k,\beta}^{(m)}+\delta_{j2}(m+1)u_k^{(m+1)}\};\cdots(2)$$

上式中の δ_{ij} はKronecker delta，指標のうちラテン文字は1,2,3を，ギリシア文字は1,3をとるものとする。

次に，Kirchhoffの応力テンソル σ_{ij} と e_{ij} の間に一般化Hooke法則が成立するとすれば，σ_{ij} は $u_k^{(n)}$ を用いて

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}e_{kl}=\sum_{n=0}^{\infty}x_2^{n}\{C_{ij\alpha l}u_{l,\alpha}^{(n)}+(n+1)C_{ij2l}u_l^{(n+1)}\}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x_2^{n+m}\{C_{ij\alpha\beta}u_{p,\alpha}^{(n)}u_{p,\beta}^{(m)}$$
$$+2(m+1)C_{ij2\alpha}u_{p,\alpha}^{(n)}u_p^{(m+1)}+(n+1)(m+1)C_{ij22}u_p^{(n+1)}u_p^{(m+1)}\},\cdots\cdots(3)$$

のように表示される。　σ_{ij} の板中央面(i.e. $x_2=0$ の面)に関する n 次モーメントを $\sigma_{ij}^{(n)}$ で定義すれば，

$$\sigma_{ij}^{(n)}=\int_{-b}^{b}x_2^{n}\cdot\sigma_{ij}\,dx_2=\sum_{m=0}^{\infty}I^{n+m}\{C_{ij\alpha l}u_{l,\alpha}^{(m)}+(m+1)C_{ij2l}u_l^{(m+1)}\}+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}I^{n+m+k}\{C_{ij\alpha\beta}u_{p,\alpha}^{(m)}u_{p,\beta}^{(k)}$$
$$+2(k+1)C_{ij2\alpha}u_{p,\alpha}^{(m)}u_p^{(k+1)}+(m+1)(k+1)C_{ij22}u_p^{(m+1)}u_p^{(k+1)}\};\cdots\cdots(4)$$

ここに，$I^{n}=\int_{-b}^{b}x_2^{n}dx_2=\hat{\delta}_n\cdot\dfrac{2b^{n+1}}{n+1}$，　$\hat{\delta}_n=\begin{cases}1 & \text{for } n:\text{even},\\ 0 & \text{for } n:\text{odd}.\end{cases}$

上式で $\sigma_{ij}^{(0)}$ は平板の断面力としての軸力，せん断力に，$\sigma_{ij}^{(1)}$ は曲げモーメント，ねじりモーメント等に対応する力学量である。　ここで，式(5)のようなVoigt規約を用いた直交異方性の構成方程式を考える。　等方性の場合には式(5)の C_{ij} は式(5)′のように簡単になる。

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{15}\\ &C_{22}&C_{23}&C_{25}\\ &&C_{33}&C_{35}\\ (\text{対称})&&&C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{13}\end{Bmatrix},\quad\begin{Bmatrix}\sigma_{23}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{44}&C_{46}\\ C_{46}&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}e_{23}\\ e_{12}\end{Bmatrix}\cdots\cdots(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}C_{11}=C_{22}=C_{33}=\lambda+2\mu,\quad C_{12}=C_{23}=C_{13}=\lambda.\\ C_{44}=C_{55}=C_{66}=\mu,\quad C_{15}=C_{25}=C_{35}=C_{46}=0.\end{array}\right\}\cdots\cdots(5)'$$

ここで，一般化Hamilton原理を考える。

$$\delta\int_{t_0}^{\hat{t}_0}dt\int_V(T-U)dV+\int_{t_0}^{\hat{t}_0}dt\left[\int_S t_j\,\delta u_j\,dS+\int_V f_j\,\delta u_j\,dV\right]=0\,.$$

ここに，$\delta\int_V U\,dV=\int_V\sigma_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV$，　$\delta\int_V T\,dV=\int_V\rho\,\ddot{u}_j\,\delta u_j\,dV$.

上式中のt_jは表面力，f_jは物体力を表わす。　上式に式(1)〜(4)を代入し整理すると最終的に以下のような支配方程式ならびに境界条件式が求められる。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha j,\alpha}^{(n)} - n\sigma_{zj}^{(n-1)} + F_j^{(n)} + f_j^{(n)} + \hat{K}_j^{(n)} = \rho\sum_{m=0}^{\infty} I^{n+m}\ddot{u}_j^{(m)}, \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)\\
&\text{ここに,}\ \hat{K}_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty}\{\sigma_{\alpha\beta}^{(n+m)}u_{j,\alpha\beta}^{(m)} + [\sigma_{\alpha\beta,\alpha}^{(n+m)} + (m-n)\sigma_{z\beta}^{(n+m-1)}]u_{j,\beta}^{(m)} + (m+1)(\sigma_{z\alpha,\alpha}^{(n+m)} - n\sigma_{zz}^{(n+m-1)})u_j^{(m+1)}\},\\
&F_j^{(n)} = [x_z^n\cdot\sigma_{zk}(\delta_{kj}+u_{j,k})]_{-b}^{b} = [x_z^n\cdot\sigma_{zj} + \sum_{m=0}^{\infty}x_z^n\{\sigma_{z\alpha}u_{j,\alpha}^{(m)} + (m+1)\sigma_{zz}u_j^{(m+1)}\}]_{-b}^{b},\quad f_j^{(n)} = \int_{-b}^{b}x_z^n\cdot f_j\,dx_z
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{*}{T}{}_j^{(n)} = \int_{-b}^{b}x_z^n\{n_\alpha\sigma_{\alpha k}(\delta_{kj}+u_{j,k})\}_C dx_z = n_\alpha\{\sigma_{\alpha j}^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty}[\sigma_{\alpha\beta}^{(n+m)}u_{j,\beta}^{(m)} + (m+1)\sigma_{z\alpha}^{(n+m)}u_j^{(m+1)}]\}\quad \text{on } C.\\
&\text{または}\\
&\bar{u}_j^{(n)} = u_j^{(n)}\quad \text{on } C.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

3. 項数の打ち切りと支配方程式

いま,具体例として変位係数$u_j^{(n)}$のうち$u_j^{(0)}$および$u_\alpha^{(1)}$までの項数のみを採用するものとすれば,

$$e_{11} = u_{1,1}^{(0)} + \frac{1}{2}(u_{2,1}^{(0)})^2 + x_2\cdot u_{1,1}^{(1)},\quad e_{zz}=0,\quad e_{12} = \frac{1}{2}(u_{2,1}^{(0)} + u_1^{(1)}),\quad e_{13} = \frac{1}{2}\{(u_{1,3}^{(0)} + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}u_{2,3}^{(0)}) + x_2(u_{1,3}^{(1)} + u_{3,1}^{(1)})\};\ etc.$$

となり，断面力$\sigma_{ij}^{(n)}$は式(4)によって，上記の項数打ち切りした変位係数$u_j^{(0)}$, $u_\alpha^{(1)}$で表示されるが，ここでさらに$\sigma_{ij}^{(n)}$のうち$\sigma_{ij}^{(0)}$および$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$までを採用すれば，支配方程式(6)は次式のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{11,1}^{(0)} + \sigma_{13,3}^{(0)} + F_1^{(0)} + \underline{f_1^{(0)}} + \{\underline{(\sigma_{11}^{(0)}u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{13}^{(0)}u_{1,3}^{(0)}} + \underline{\sigma_{12}^{(0)}u_1^{(1)}}) + (\underline{\sigma_{11}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \sigma_{13}^{(1)}u_{1,3}^{(1)}})\}_{,1} + \{(\underline{\sigma_{13}^{(0)}u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}u_{1,3}^{(0)}} + \underline{\sigma_{23}^{(0)}u_1^{(1)}}) + (\underline{\sigma_{13}^{(1)}u_{1,1}^{(1)} + \sigma_{33}^{(1)}u_{1,3}^{(1)}})\}_{,3} = 2b\rho\ddot{u}_1^{(0)}\\
&\sigma_{12,1}^{(0)} + \sigma_{23,3}^{(0)} + F_2^{(0)} + \underline{f_2^{(0)}} + (\sigma_{11}^{(0)}u_{2,1}^{(0)} + \sigma_{13}^{(0)}u_{2,3}^{(0)})_{,1} + (\sigma_{13}^{(0)}u_{2,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)}u_{2,3}^{(0)})_{,3} = 2b\rho\ddot{u}_2^{(0)},\\
&\sigma_{11,1}^{(1)} + \sigma_{13,3}^{(1)} - \sigma_{12}^{(0)} + F_1^{(1)} + \underline{f_1^{(1)}} + \underline{(\sigma_{11}^{(1)}u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{13}^{(1)}u_{1,3}^{(0)})_{,1}} + \underline{(\sigma_{13}^{(1)}u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{33}^{(1)}u_{1,3}^{(0)})_{,3}} - \underline{(\sigma_{12}^{(0)}u_{1,1}^{(0)} + \sigma_{23}^{(0)}u_{1,3}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)}u_1^{(1)})} = \frac{2}{3}b^3\rho\ddot{u}_1^{(1)},\\
&etc.
\end{aligned}\right\}\cdots(8)$$

4. 従来までの研究結果との関係

von Kármán 理論[1,2]は式(8)において$\ddot{u}_\alpha^{(0)} = \ddot{u}_\alpha^{(1)} = 0$, $F_\alpha^{(0)} = F_\alpha^{(1)} = 0$と置き，下線(実線および点線)の項を省略すると共にせん断変形無視の仮定(i.e. $u_\alpha^{(1)} = -u_{z,\alpha}^{(0)}$)を導入したものに等しい。　Chu & Herrmann[3]の結果は下線(実線および点線)の項を無視したものに等しくなる。　Singh & Others[4]は下線(実線)の項を無視し，式$(8)_3$から$\sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{11,1}^{(1)} + \sigma_{13,3}^{(1)}$を求め,その結果を$(8)_1$に代入して求めたものに一致する。　Wu & Vinson[5]はせん断変形(i.e. $u_\alpha^{(1)}$の独立性)を考慮しているが,得られた基礎式の線形化をはかるためにBergerの手法[6](ひずみエネルギ式中のmembrane strainsに関する第2不変量を無視することによってvon Kármán理論式の線形化を行なう方法)を利用している。　したがって得られた結果は文献4)を特殊化したものに相当する。　Novozhilov[7]のいう"strong bending"は$u_j^{(1)}$までを考慮するが,断面剛の仮定(i.e. $e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0$)を導入して得られるものに等価である。　また中川らの結果[8]はNovozhilovの考えを特殊化したものに相当し,式(8)で$\ddot{u}_i^{(0)} = \ddot{u}_\alpha^{(1)} = 0$, $F_\alpha^{(1)} = 0$とし下線(実線)の項を無視した上で$(8)_3$から$\sigma_{2\alpha}^{(0)}$を求め，その結果と断面剛の仮定から得られる関係式とを$(8)_1$の点線の項に代入した結果に一致する。

なお,梁の場合には上記で定式化したすべての式において$u_3^{(n)}$とx_3の座標で偏微分される項をすべて消去すればよい。　例えば,梁理論に関する西野らの結果[9]は$u_3^{(0)} = u_3^{(1)} = 0$, $\ddot{u}_j^{(0)} = u_j^{(1)} = 0$, $F_1^{(1)} = 0$と置き,$(u_1^{(1)})^2 + (1+u_2^{(1)})^2 = 1$, $\frac{u_1^{(1)}}{1+u_2^{(1)}} + \frac{u_{2,1}^{(0)}}{1+u_{1,1}^{(0)}} = 0$として整理したものに基本的に一致する。　その他の論文[10]との関連，層状性・異方性板への適用等については学会当日に発表する。

5. 参考文献：

1) Chia, C.Y.: "Nonlinear Analysis of Plates", McGraw-Hill (1980), 422 p.　2) Y.C.ファン著(大橋他訳):「固体の力学/理論」,培風館(1970), pp.470~477.　3) Chu, H.N. & Herrmann, G.; Jour. Appl. Mech. (1956), pp.532~540,　4) Singh, P.N. & Others; Jour. Sound Vib., Vol.17 (1971), pp.235~240.　5) Wu, C.I. & Vinson, J.R.; Jour. Appl. Mech. (1969), pp.254~260.　6) Berger, H.M.; Jour. Appl. Mech. (1955), pp.465~472.　7) Novozhilov, V.V.: "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity", Graylock Press (1953), pp.177~183.　8) 中川・阿井・西野:「薄板の有限変位解析に関する一考察」第31回土木学会年次講演会(1976), 第I部, pp.81~82.　9) 西野・倉方・後藤:「一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位問題」,土木学会論文報告集, No.237 (1975), pp.11~26.　10) Ciarlet, P.G.; "Comp. Methods in Nonlinear Mech." (ed. by J.T. Oden), North-Holland (1980), Chp.6, pp.185~203, etc.