

電力中央研究所 正員 中村秀治

電力中央研究所 正員 青柳 栄

1. まえがき

先に、参考文献1)～3)において、薄肉構造部材に関連して現われる定数係数常微分方程式が有する特異な性質を指摘し、その特徴を生かした2つの数値解法を提案した。その1つは固有値解析に基づくものであるが、適用範囲は線形定数係数の場合にはば限定される。しかし、本来、弾性体に見られる現象は線形性が強く、大変形のような非線形性は線形解を補正する形で考慮されている。この点が流体などと根本的に異なる所であり、摂動概念を導入して、先に述べた解法を非定数係数あるいは非線形の場合へ拡張する余地が生まれる。以下に、その概略を述べ、数値計算例を示す。

2. 摂動法の導入と数値計算アルゴリズム

与えられた未知関数 $y(x)$ に関する関数方程式を $F[y] = 0$ とする時、これを書きかえて $C[y] - N[y] = 0$ と表示することができる。ここで、 C は定数係数を持つ線形部分であり、 N は非定数係数あるいは非線形部分である。 y および N について、微小なパラメータ ϵ を用いて、次の形に展開できるものとするれば、

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \dots \\ N[y] &= \epsilon N_1[y_0] + \epsilon^2 N_2[y_0, y_1] + \epsilon^3 N_3[y_0, y_1, y_2] + \dots \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

この時、 C は線形であるから、

$$C[y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots] = C[y_0] + \epsilon C[y_1] + \epsilon^2 C[y_2] + \dots \text{----- (2)}$$

式(1)、(2)より、 ϵ の同べきを比較すると

$$\left. \begin{aligned} C[y_0] &= 0 \\ C[y_1] &= N_1[y_0] \\ &\vdots \\ C[y_{n+1}] &= N_{n+1}[y_0, y_1, \dots, y_n] \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

となり、式(3)の1式は線形方程式で解けて、2式以後はそれまでに得られた解を用いて解ける⁴⁾。以上が摂動法の一般論である。しかし、我々が特に静的構造解析を行なう場合に、77元連立常微分方程式ではどのように定め、どのように式(3)の形に持ち込めばよいのであろうか。 ϵ は摂動概念を説明するために有効ではあるが、本質的には何ら重要ではない。正規形の連立常微分方程式

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x, Y) Y(x) + Q(x) \text{----- (4)}$$

の解を次のように求めたとしても、それが十分収束しているなら、正解のはずである。

2.1 非定数係数線形常微分方程式の場合 (式(4)の係数マトリックスが $A(x)$ の場合)

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= A_c + A_N(x) \\ Y(x) &= Y_0(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x) + \dots \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

ここで、 A_c は微小変位理論のもとに一樣平均断面で導かれた係数マトリックス

と展開すれば、式(5)を式(4)に代入して

$$\left(\frac{dY_0}{dx} + \frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} + \dots \right) = (A_c Y_0 + Q) + (A_c Y_1 + A_N Y_0) + (A_c Y_2 + A_N Y_1) + \dots \text{----- (6)}$$

つまり、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY_0}{dx} &= A_c Y_0 + Q \\ \frac{dY_1}{dx} &= A_c Y_1 + A_N Y_0 \\ \frac{dY_2}{dx} &= A_c Y_2 + A_N Y_1 \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

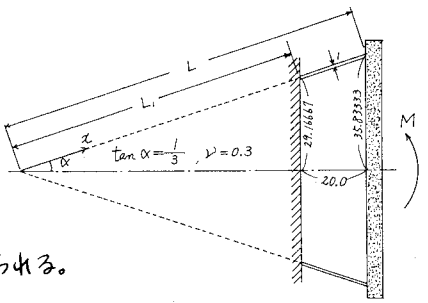
境界条件は式(1)式が与えられた境界条件を満足し、式(2)式以後は同次の補助条件を満足すべきである。

2.2 非線形常微分方程式の場合 (式(6)の係数マトリックスが $A(Y)$ の場合)

$$\begin{aligned} A(Y) &= A_c + A_N(Y) \\ Y(x) &= Y_0(x) + Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x) + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

ここで A_c は微小変位理論のもとに様平均断面で導かれた係数マトリックスと展開すれば、式(8)を式(6)に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_0}{dx^2} + \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \frac{d^2 Y_2}{dx^2} + \dots \\ = (A_c Y_0 + Q) + \{ A_c Y_1 + A_N(Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_0 \} \\ + \{ A_c Y_2 + A_N(Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_1 \} \\ + \{ A_c Y_3 + A_N(Y_0, Y_1, Y_2, \dots) Y_2 \} \\ + \dots \end{aligned} \tag{9}$$



そこで、 $Y_1^{(0)} = Y_2^{(0)} = \dots = 0$ として次のアルゴリズムが考えられる。

$P = 0$

$\frac{d^2 Y_0}{dx^2} = A_c Y_0 + Q$

$P = P + 1$

$\frac{d^2 Y_1}{dx^2} = A_c Y_1 + A_N(Y_0, Y_1^{(P-1)}, Y_2^{(P-1)}, Y_3^{(P-1)}, \dots) Y_0$
 $\frac{d^2 Y_2}{dx^2} = A_c Y_2 + A_N(Y_0, Y_1^{(P-1)}, Y_2^{(P-1)}, Y_3^{(P-1)}, \dots) Y_1$
 $\dots$
 $\frac{d^2 Y_{n+1}}{dx^2} = A_c Y_{n+1} + A_N(Y_0, Y_1^{(P-1)}, Y_2^{(P-1)}, Y_3^{(P-1)}, \dots) Y_n$

収束判定

NO
 YES

STOP

} (10)

式(10)の式(1)式が境界条件を他は同次の補助条件を満足する。

3. 数値計算例

Fig. 1に示す円錐殻モデル(右端完全固定、左端に剛板が接着されモーメントが作用)について文献(2)に述べた円筒殻、円錐殻の式で数値計算した結果を Fig. 2に示す。

4. あとがき

以上、薄肉構造部材に関連して現われる非定数係数、あるいは非線形常微分方程式の摂動法による一数值解法について述べ、数値計算例を示した。摂動法は非線形振動論を中心に発達しており、多くの解析的検討がなされたが、実際に解を求める場合、解の複雑さのために2次、あるいは3次の近似にとどまり、解の収束も確認されないことが殆どであった。その意味で計算機の使用を前提にした本解法は興味を持たれる。ただし「摂動解が収束あるなら、このような解法が成立し得る」というだけで、それ以上の議論は未だ行われていない。収束性、本解法の適用範囲等の検討は今後の課題としたい。

5. 参考文献

- 1) 中村秀治: 管路、薄肉はりなどの線形常微分方程式の一数值解法, 土木学会論文報告集 No.271 1978, 3
- 2) 中村秀治: 円筒、円錐形状をもつ管路のシェルとしての応力解析, 土木学会論文報告集 No.285 1979, 5
- 3) 中村秀治: 数値誤差改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文報告集 No.289 1979, 9
- 4) 近藤次郎: 技術者・研究者のための応用数学, 下, 丸善, 1965
- 5) Bellman, R : Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. Athena Series, Holt, Rinehart and Winston. Inc., 1964

Fig. 1 計算モデル

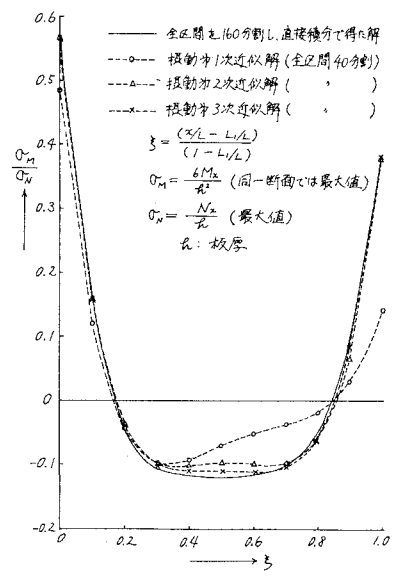


Fig. 2 計算結果