

長岡技術科学大学大学院 学生員 萩下 登喜雄

長岡技術科学大学工学部 正 員 笹戸 松二

長岡技術科学大学工学部 正 員 林 正

1. まえがき

薄肉円筒シェルの解析には、従来より解析的な解法^{1),2)}、または有限要素法³⁾を用いて解かれている。特に、円筒シェルの輪切りにしてリング要素を用いる解法⁴⁾は、四角形または三角形要素を用いた有限要素法より少ない要素数を用いて効率よく計算することができる。これらの解法に対して、本報告では母線方向に円筒シェルの分割した有限帯板法を用いる。本解法の特徴は、細長い円筒シェルに対して計算効率が良いことである。

2. 有限帯板法の定式化

(1) 解析仮定 : 1) シェルの変形と応力に関しては、Kirchhoff-Loveの仮定が成り立つ。2) 1枚の帯板要素は等方性で厚さと曲率半径が一定な曲面板である。3) 帯板要素は軸方向の両端($x=0, l$)において単絶支持されている。

(2) 帯板要素 : 帯板要素の座標系および帯板中央面での節線変位を図-1

のように定める。歪-変位関係式として次式を用いた。

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\beta \\ \gamma_{xp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R} - \frac{n}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{2n}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

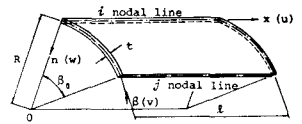


図-1 帯板要素

(3) 変位関数 : 帯板の節線自由度として $u, v, w, \varphi = \partial u / \partial \beta, \psi = \partial v / \partial \beta, \theta = \partial w / \partial \beta$ の6自由度を考える。帯板要素の中央面における変位を次式のような級数の形で仮定する。

$$u = f_1^T \sum_m U_m dl_m, \quad v = f_2^T \sum_m V_m dl_m, \quad w = f_3^T \sum_m W_m dl_m \quad (2)$$

ここに dl_m は、級数展開された節線変位の第 m 項の一般化変位であり、次式のベクトルで表わされる。

$$dl_m = \{ u_{1m}, \varphi_{1m}, v_{1m}, \psi_{1m}, u_{2m}, \varphi_{2m}, v_{2m}, \psi_{2m}, w_{1m}, \theta_{1m}, w_{2m}, \theta_{2m} \}^T \quad (3)$$

また f_i は β 方向の形状関数であり、 $\eta = \beta / \beta_0$ に関する式(5)の3次式を用いて次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} f_1^T \\ f_2^T \\ f_3^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 & 0 & 0 & f_3 & f_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{Bmatrix} \quad (4) \quad \left. \begin{aligned} f_1 &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, & f_2 &= \beta_0 \eta (1 - \eta)^2 \\ f_3 &= 3\eta^2 - 2\eta^3, & f_4 &= \beta_0 \eta^2 (\eta - 1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

U_m, V_m, W_m は x 軸方向に級数展開された展開関数の第 m 項であり、本文では次の3つの関数系を用いる。

$$\textcircled{1} \quad U_m = \cos \alpha_m x, \quad V_m = W_m = \sin \alpha_m x \quad (\alpha_m = m\pi/l, \quad m = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\textcircled{2} \quad U_0 = 0, \quad V_0 = W_0 = 1 - \cos(C_0 x/l) \exp(-C_0 x/l) \quad (C_0 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \sqrt{(l/R)(l/t)}, \quad 0 \leq x/l \leq 0.5) \quad (7)$$

$$\textcircled{3} \quad U_n = 1 - \cos(C_n \zeta) \exp(-C_n \zeta), \quad V_n = W_n = -A_n + (\cos(C_n \zeta) + \sin(C_n \zeta)) \exp(-C_n \zeta) \quad \left. \begin{aligned} (\zeta = 0.5 - x/l, \quad 0 \leq \zeta \leq 0.5, \quad A_n = (\cos(0.5 C_n) + \sin(0.5 C_n)) \exp(0.5 C_n), \quad C_n = \text{const.}, \quad n = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\textcircled{2}$ では $m \geq 1$ に対して、 $\textcircled{3}$ では $n \geq 4$ に対して $m = n - 3$ として式(6)の三角関数を用いる。

(4) 平衡方程式 : 式(2)を式(1)に代入すると、各歪成分は次式で表わされる。

$$\varepsilon_i = \sum_m b_{im}^T dl_m \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

$$b_{1m} = U_m' f_1 - n W_m' f_3, \quad b_{2m} = \frac{1}{R} V_m g_2 - \frac{1}{R} W_m g_3 - \frac{n}{R} (W_m h_3 + V_m g_2), \quad b_{3m} = V_m' f_2 + \frac{1}{R} U_m g_1 - \frac{2n}{R} (W_m' g_3 + V_m' f_2) \quad (10)$$

ここで、 g_i, h_i は f_i の1次と2次の β に関する導関数であり、プライムは x に関する微分を表わす。

次に、帯板要素の弾性状態での応力-歪関係式は通常の弾性マトリックス $D = [D_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\sigma = D \varepsilon \quad (11) \quad \text{ここに、} \sigma = \{ \sigma_x, \sigma_\beta, \tau_{xp} \}^T \quad (12)$$

仮想仕事の原理を用いると、 $[K_{mn}]$ を帯板要素の剛性行列、 P_m を等価節線力として帯板要素の平衡方程式は

$$\sum_n [K_{mn}] d_n = P_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (13)$$

(5) 剛性行列：剛性行列 $[K_{mn}]$ はヤング係数 E 、ポアソン比 ν 及び $\lambda=(1-\nu)/2$ を用いて次式のようにになる。

$$[K_{mn}] = \frac{EtR\beta_0 l}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^1 \{A_1\} d\xi d\eta + \frac{Et^3 R\beta_0 l}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \{A_2\} d\xi d\eta \quad (\xi=x/l) \quad (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \{A_1\} = & U_m U_n (f_1 f_1^T) + \frac{1}{R^2} V_m V_n (g_2 g_2^T) + \frac{1}{R^2} W_m W_n (h_3 h_3^T) - \frac{1}{R^2} V_m W_n (g_2 f_3^T) - \frac{1}{R^2} W_m V_n (f_3 g_2^T) \\ & - \frac{\nu}{R} U_m W_n (f_1 f_3^T) + \frac{\nu}{R} V_m U_n (g_2 f_3^T) - \frac{\nu}{R} W_m U_n (h_3 f_3^T) + \lambda V_m V_n (f_2 f_2^T) + \frac{\lambda}{R^2} U_m U_n (g_1 g_1^T) + \frac{\lambda}{R^2} V_m V_n (f_2 g_1^T) + \frac{\lambda}{R^2} U_m V_n (g_1 f_2^T) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \{A_2\} = & W_m W_n (h_3 h_3^T) + \frac{1}{R^2} W_m W_n (h_3 h_3^T) + \frac{1}{R^2} V_m V_n (g_2 g_2^T) + \frac{1}{R^2} W_m W_n (h_3 g_2^T) + \frac{1}{R^2} V_m W_n (g_2 h_3^T) + \frac{\nu}{R^2} W_m W_n (f_3 f_3^T) \\ & + \frac{\nu}{R^2} W_m W_n (h_3 f_3^T) + \frac{\nu}{R^2} V_m W_n (g_2 f_3^T) + \frac{4\lambda}{R^2} V_m V_n (f_2 f_2^T) + \frac{4\lambda}{R^2} V_m V_n (f_2 g_1^T) + \frac{4\lambda}{R^2} W_m V_n (g_1 f_2^T) + \frac{4\lambda}{R^2} V_m W_n (f_2 g_1^T) \end{aligned} \quad (16)$$

3. 数値計算例

(1) 求心等分布荷重を受ける円筒シェル：求心方向に等分布の面荷重が作用する場合⁴⁾について計算を行なった(図-2)。本計算例は断面中心点に関して点対称の問題であるので、1枚の帯板要素を用いて解くことができる。展開関数として関数①を採用した場合、たわみに関しては15項で解析解とはほぼ一致した。関数②を用いた場合は1項のみで解析解と一致した(表-1)。参考までに、表-1のF.E.M.では28個のリング要素を用いている。

(2) 集中荷重を受ける円筒シェル：両端において円周に沿って単純支持された円筒シェルの中央点に集中荷重が作用する場合の計算を行なった。解析では円筒シェルの $1/4$ 円弧の部分 M 個の帯板要素に分割し、級数展開項数を K 個用いて計算を行ない、最大変位が生じる荷重載荷点の法線方向の変位をFlüggeによる解析解²⁾と比較し、解析精度の検討を行なった。関数①だけでは L/R が大になるほど項数を増さなければならない。関数③を用いた場合には6項とれば $L/R=45$ で95%程度の精度が得られた(図-3)。なお、関数③において定数 C_n ($n=1, 2, 3$)として次の値を用いた、

$$C_1 = 10\pi/4, \quad C_2 = 3^3\pi/2, \quad C_3 = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)(L/R)(L/t)} \quad (17)$$

4. あとがき

数値計算例では特別な荷重状態の場合を扱ったが、計算結果より軸方向の展開関数を工夫することによって少ない項数でかなりの精度の解が得られることを確かめた。 L/R が大きい場合に三角関数のみを使用すれば多くの項数が必要になるが、直交関数系のみを用いた場合には、有限帯板法では各級数ごとに式を分離して計算できる長所があるので、有限要素法に較べて計算時間と記憶容量ははるかに少なく、長い円筒シェルの解析に本解析法は有効である。最後に、本研究に協力していただいた林 健治助君に謝意を表する。

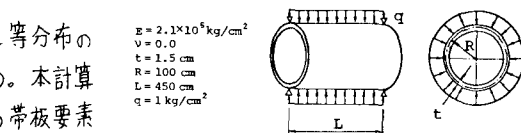


図-2 求心等分布荷重を受ける円筒シェル

表-1 法線方向の変位 w ($\times 10^{-3}$ cm)

x (cm)	Solution by FEM		Solution by FEM	Analytical Solution
	① (K=15)	② (K=1)		
0	0	0	0	0
56.25	3.151	3.167	3.167	3.167
112.5	3.177	3.175	3.175	3.175
168.75	3.186	3.175	3.176	3.175
225.0	3.189	3.175	3.175	3.175

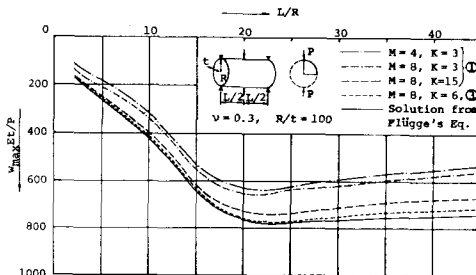


図-3 集中荷重を受ける円筒シェル

- 1) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 2) Yuan, S.W. and L. Ting: On Radial Deflections of a Cylinder Subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, J. of Appl. Mech., June, 1957.
- 3) Cantin, G. and R.W. Clough: A Curved, Cylindrical-Shell, Finite Element, AIAA, Vol. 6, No. 6, June, 1968.
- 4) 川股重也: シェル構造解析, コンピュータによる構造工学講座, II-6-A, 培風館, 1974.