I-26　偏平らせん殻のフーリエ解析

東京電機大学　正　井浦雅司○
早稲田大学　正　平嶋政治

1. はじめに

らせん殻に関する研究は，1954年のReissnerの論文に始まり，以後多くの研究者により行われているが，これらの中で解析解を主体とした研究は，予め境界条件の一部が決まっており，任意の境界条件に適用できる解析解は求められていない。本報告の目的は，フーリエ級数による手法を用いて，偏平らせん殻周辺において任意の境界条件を扱い得る一般解を求めることにある。従来の研究と異なる点は，変数変換を施すことにより，定数係数の基礎微分方程式を導き，解を二方向にフーリエ展開して余関数を求めた点である。

2. 偏平らせん殻の基礎式

法線方向変位w，応力関数ϕ，および面内分布荷重に関するポテンシャル関数Ωを用いると，Vlasov 型の微分方程式は

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{r\partial\theta}\right) = \tilde{P}_n \qquad (1.1)$$

$$\nabla^2\nabla^2\tilde{\phi} - \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) = \nabla^2\tilde{\Omega} \qquad (1.2)$$

と書け，$^{(1)}$ ここに

$$\tilde{\phi} = \beta^2\phi/Et,\ \beta^4 = 12(1-\nu^2)/Et,\quad K = 2c_p\beta^2$$

$$D = Et^3/12(1-\nu^2),\ \tilde{P}_n = P_n/D,\ \tilde{\Omega} = -(1-\nu)\beta^2\Omega/Et$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + 1/r\cdot\partial/\partial r + \partial^2/r^2\partial\theta^2 \qquad (2.1\sim2.7)$$

であり，EはYoung係数，νはPoisson比，tは殻厚，P_nは法線方向分布荷重である。ここで，新たに次式で定義される変数x, yを導入する。

$$\theta = \alpha\cdot(1+x)/2 \qquad (3.1)$$

$$\ln r = y/2\cdot\ln(r/r_o) + \ln(r_o\cdot r_1)/2 \qquad (3.2)$$

ここに，αは殻の開角で，r_o, r_1は殻の内径および外径である。変数x, yを用いて(1)式を書き直すと

$$L_1(w) + L_2(\tilde{\phi}) = \tilde{P}_n\ e^{s} \qquad (4.1)$$

$$L_1(\tilde{\phi}) - L_2(w) = (\Delta\tilde{\Omega})e^{s/2} \qquad (4.2)$$

となり，ここに

$$L_1(\ ) = \partial^4/\partial\bar{x}^4 + 4\,\partial^2/\partial\bar{x}^2 - 4\,\partial^3/\partial\bar{x}^2\partial\bar{y} + 2\,\partial^4/\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}^2 + 4\,\partial^2/\partial\bar{y}^2 - 4\,\partial^3/\partial\bar{y}^3 + \partial^4/\partial\bar{y}^4$$

$$L_2(\ ) = K(\partial^2/\partial\bar{x}\partial\bar{y} - \partial/\partial\bar{x}) \qquad (5.1\sim5.8)$$

$$\bar{x} = x/a,\ \bar{y} = y/b,\ a = 2/\alpha,\ b = 2/\ln(r_1/r_o)$$

$$s = 2y\ln(r_1/r_o) + 2\ln(r_o\cdot r_1),\ \Delta = \partial^2/\partial\bar{x}^2 + \partial^2/\partial\bar{y}^2$$

(4)式の一般解は

$$w = w^{I} + w^{II} + w^{III} \qquad (6.1)$$

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^{I} + \tilde{\phi}^{II} + \tilde{\phi}^{III} \qquad (6.2)$$

と書け，ここに$(\ )^{I}$は特殊解で，$(\ )^{II}$と$(\ )^{III}$はそれぞれx方向とy方向にフーリエ展開した余関数である。

3. 特殊解 w^{I}, $\tilde{\phi}^{I}$

法線方向等分布荷重P_nが作用した時の特殊解を求める。P_nをx方向にフーリエ展開することにより，特殊解w^{I}および$\tilde{\phi}^{I}$は

$$w^{I} = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M}(S_{1,m}e^{s} + R_{1,m}e^{s/2})\cos\lambda_m x \qquad (7.1)$$

$$\tilde{\phi}^{I} = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M}(S_{2,m}e^{s} + R_{2,m}e^{s/2})\sin\lambda_m x \qquad (7.2)$$

と求まり，ここに

$$S_{1,m} = \delta_{1,m}\tilde{Q}_m/(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2),\ S_{2,m} = \delta_{2,m}\tilde{Q}_m/(\delta_{1,m}^2 - \delta_{2,m}^2)$$

$$R_{1,m} = \delta_{4,m}\hat{Q}_m/(\delta_{3,m}^2 - \delta_{4,m}^2),\ R_{2,m} = \delta_{3,m}\hat{Q}_m/(\delta_{3,m}^2 - \delta_{4,m}^2)$$

$$\delta_{1,m} = a^4\lambda_m^4 - 20a^2\lambda_m^2 + 64,\ \delta_{2,m} = -3Ka\lambda_m$$

$$\delta_{3,m} = a^4\lambda_m^4 - 4a^2\lambda_m^2,\ \delta_{4,m} = -Ka\lambda_m,\ \tilde{Q}_m = Q_m/D$$

$$\hat{Q}_m = (1-\nu)a\lambda_m K Q_m/2Et,\ Q_m = 2P_n(-1)^{(m-1)/2}/\lambda_m$$

$$\lambda_m = m\pi/2\ . \qquad (8.1\sim8.12)$$

4. 余関数

4.1 w^{II}と$\tilde{\phi}^{II}$

余関数w^{II}と$\tilde{\phi}^{II}$とをx方向へフーリエ展開し

$$w^{II} = \sum_{m=0,1,3,5,\cdots}^{M} W_{c,m}^{II}(y)\cos\lambda_m x + \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M} W_{s,m}^{II}(y)\sin\lambda_m x \qquad (9.1)$$

$$\tilde{\phi}^{II} = \sum_{m=0,1,3,5,\cdots}^{M} \tilde{\phi}_{c,m}^{II}(y)\cos\lambda_m x + \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M} \tilde{\phi}_{s,m}^{II}(y)\sin\lambda_m x \qquad (9.2)$$

とおく。本報告では$m\geqq1$の場合のみを考えることとし，(9)式を(4)式へ代入すれば，(但し，$\tilde{P}_n = \tilde{\Omega} = 0$) 以下の二組の連立微分方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned} L_3(W_{c,m}^{II}) + L_4(\tilde{\phi}_{s,m}^{II}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{s,m}^{II}) + L_4(W_{c,m}^{II}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

$$\left.\begin{aligned} L_3(W_{s,m}^{II}) - L_4(\tilde{\phi}_{c,m}^{II}) &= 0 \\ L_3(\tilde{\phi}_{c,m}^{II}) - L_4(W_{s,m}^{II}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

ここに，

$$L_3(\ ) = d^4/d\bar{y}^4 - 4d^3/d\bar{y}^3 + (4 - 2a^2\lambda_m^2)d^2/d\bar{y}^2$$

$$+4a^2\lambda_m^2\, d/d\bar{y} + a^4\lambda_m^4 - 4a^2\lambda_m^2 \tag{11.1}$$

$$L_4(\ ) = ka\lambda_m\,(d/d\bar{y} - 1) \tag{11.2}$$

ここで,

$$w^{\mathrm{II}}_{c,m} = A_m \exp\{(1+\lambda)\bar{y}\},\quad \widetilde{\phi}^{\mathrm{II}}_{s,m} = B_m \exp\{(1+\lambda)\bar{y}\} \qquad (12.1)$$

$$w^{\mathrm{II}}_{s,m} = \hat{A}_m \exp\{(1+\hat{\lambda})\bar{y}\},\quad \widetilde{\phi}^{\mathrm{II}}_{c,m} = \hat{B}_m \exp\{(1+\hat{\lambda})\bar{y}\} \qquad (12.4)$$

とおき, (10)式へ代入すると, A_m と B_m および $\hat{A}_m$ と $\hat{B}_m$ が共に零でないという条件より, 以下の8次の代数方程式を得る。

$$f(x)^2 - g(x)^2 = 0 \quad ,\quad (X = \lambda, \hat{\lambda}) \tag{13}$$

ここに,

$$f(x) = \{X^2 - (1+a\lambda_m)^2\}\{X^2 - (1-a\lambda_m)^2\} \tag{14.1}$$

$$g(x) = Ka\lambda_m X \tag{14.2}$$

一般に, (13)式の根としては (i) 8根全てが実根の場合と (ii) 4根が虚根で4根が実根の場合とを考えれば十分であり, ここでは (ii) の場合について考える。この時, (13)式の根は

$$X_{2j-1} = -X_{2j} = \eta_j \quad ,\quad (j = 1, 2) \tag{15.1}$$

$$X_{5,6,7,8} = \pm\kappa \pm i\mu \tag{15.2}$$

と書け, ここに η_j, κ, μ は実数であり, $i = \sqrt{-1}$ である。(15)式および(12)式より余関数 w^{II} は

$$\begin{aligned}
w^{\mathrm{II}} = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M} \Big[&\sum_{j=1}^{2}\big(A_{2j-1,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} + A_{2j,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}\big) \\
&+ A_{5,m} e^{\bar{y}} \cos\mu\bar{y} \cosh\kappa\bar{y} + A_{6,m} e^{\bar{y}} \sin\mu\bar{y} \cosh\kappa\bar{y} \\
&+ A_{7,m} e^{\bar{y}} \cos\mu\bar{y} \sinh\kappa\bar{y} + A_{8,m} e^{\bar{y}} \sin\mu\bar{y} \sinh\kappa\bar{y} \Big] \\
\times \cos\lambda_m x + \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{M} \Big[&\sum_{j=1}^{2}\big(A_{2j+7,m} e^{\bar{y}} \cosh \eta_j \bar{y} \\
&+ A_{2j+8,m} e^{\bar{y}} \sinh \eta_j \bar{y}\big) + A_{13,m} e^{\bar{y}} \cos\mu\bar{y} \cosh\kappa\bar{y} \\
&+ A_{14,m} e^{\bar{y}} \sin\mu\bar{y} \cosh\kappa\bar{y} + A_{15,m} e^{\bar{y}} \cos\mu\bar{y} \sinh\kappa\bar{y} \\
&+ A_{16,m} e^{\bar{y}} \sin\mu\bar{y} \sinh\kappa\bar{y} \Big] \times \sin\lambda_m x
\end{aligned} \tag{16}$$

となり, ここに $A_{1,m} \sim A_{16,m}$ は定数である。なお, $\widetilde{\phi}^{\mathrm{II}}$ については紙面の都合上省略した。

4.2 w^{III} と $\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}$

余関数 w^{III} と $\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}$ とを y 方向へフーリエ展開し

$$w^{\mathrm{III}} = \sum_{n=0,1,3,5,\cdots}^{N} w^{\mathrm{III}}_{c,n}(x) \cos\lambda_n y + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{N} w^{\mathrm{III}}_{s,n}(x) \sin\lambda_n y \tag{17.1}$$

$$\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}} = \sum_{n=0,1,3,5,\cdots}^{N} \widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n}(x) \cos\lambda_n y + \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{N} \widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n}(x) \sin\lambda_n y \tag{17.2}$$

とおく。4.1と同様に $n \geqq 1$ の場合のみを考えることとし, (17)式を(4)式へ代入すれば, (但し, $\bar{P}_n = \bar{\Omega} = 0$) 以下の連立微分方程式を得る。

$$L_5(w^{\mathrm{III}}_{c,n}) + L_6(w^{\mathrm{III}}_{s,n}) + L_7(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n}) + L_8(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n}) = 0$$

$$L_5(w^{\mathrm{III}}_{s,n}) - L_6(w^{\mathrm{III}}_{c,n}) + L_7(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n}) - L_8(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n}) = 0$$

$$L_5(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n}) + L_6(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n}) - L_7(w^{\mathrm{III}}_{c,n}) - L_8(w^{\mathrm{III}}_{s,n}) = 0$$

$$L_5(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n}) - L_6(\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n}) - L_7(w^{\mathrm{III}}_{s,n}) + L_8(w^{\mathrm{III}}_{c,n}) = 0$$

(18.1 ~ 18.4)

ここに,

$$L_5(\ ) = d^4/d\bar{x}^4 + (4 - 2b^2\lambda_n^2)\, d^2/d\bar{x}^2 + b^4\lambda_n^4 - 4b^2\lambda_n^2$$

$$L_6(\ ) = -4b\lambda_n\, d^2/d\bar{x}^2 + 4b^3\lambda_n^3,\quad L_7(\ ) = -k\, d/d\bar{x}$$

$$L_8(\ ) = kb\lambda_n\, d/d\bar{x}\ .$$

(19.1 ~ 19.4)

ここで

$$w^{\mathrm{III}}_{c,n} = \hat{A}_n \exp(\hat{\lambda} x),\quad w^{\mathrm{III}}_{s,n} = \hat{B}_n \exp(\hat{\lambda} x) \qquad (20.1)$$

$$\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{c,n} = \hat{C}_n \exp(\hat{\lambda} x),\quad \widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}_{s,n} = \hat{D}_n \exp(\hat{\lambda} x) \qquad (20.4)$$

とおき(18)式へ代入すると, $\hat{A}_n$, $\hat{B}_n$, $\hat{C}_n$, $\hat{D}_n$ が共に零でないという条件より, 以下の代数方程式を得る。

$$\{(\alpha_1 - \alpha_4)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2\}\{(\alpha_1 + \alpha_4)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2\} = 0. \tag{21}$$

ここに,

$$\alpha_1 = a^4\hat{\lambda}^4 + 4a^2\hat{\lambda}^2 - 2a^2\hat{\lambda}^2 b^2\lambda_n^2 - 4b^2\lambda_n^2 + b^4\lambda_n^4$$

$$\alpha_2 = 4b^3\lambda_n^3 - 4a^2\hat{\lambda}^2 b\lambda_n,\quad \alpha_3 = ka\hat{\lambda}$$

$$\alpha_4 = ka\hat{\lambda}\, b\lambda_n \qquad (22.1 \sim 22.4)$$

一般に, (21)式の根は全て虚根の場合について考えれば十分であり, その根は以下のように書ける。

$$\hat{\lambda}_{4j-3,4j-2,4j-1,4j} = \pm\zeta_j \pm i\vartheta_j \quad ,\ (j = 1 \sim 4) \tag{23}$$

ここに, ζ_j と ϑ_j は実数である。(23)式および(20)式より余関数 w^{III} は

$$\begin{aligned}
w^{\mathrm{III}} = \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{N} \Big[&\sum_{j=1}^{4}\big(\hat{A}_{4j-3,n} \cos\vartheta_j x \cosh\zeta_j x \\
&+ \hat{A}_{4j-2,n} \cos\vartheta_j x \sinh\zeta_j x + \hat{A}_{4j-1,n} \sin\vartheta_j x \cosh\zeta_j x \\
&+ \hat{A}_{4j,n} \sin\vartheta_j x \sinh\zeta_j x\big)\Big] \times \cos\lambda_n y \\
+ \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{N} \Big[&\sum_{j=1}^{4}\Big\{\hat{A}_{4j-3,n}\,(T_j^{*} \cos\vartheta_j x \cosh\zeta_j x \\
&- T_j^{**} \sin\vartheta_j x \sinh\zeta_j x) + \hat{A}_{4j-2,n}\,(T_j^{*} \cos\vartheta_j x \sinh\zeta_j x \\
&- T_j^{**} \sin\vartheta_j x \cosh\zeta_j x) + \hat{A}_{4j-1,n}\,(T_j^{*} \sin\vartheta_j x \cosh\zeta_j x \\
&+ T_j^{**} \cos\vartheta_j x \sinh\zeta_j x) + \hat{A}_{4j,n}\,(T_j^{*} \sin\vartheta_j x \sinh\zeta_j x \\
&+ T_j^{**} \cos\vartheta_j x \cosh\zeta_j x)\Big\}\Big] \times \sin\lambda_n y\ .
\end{aligned} \tag{24}$$

と表わされ, ここに $\hat{A}_{1,n} \sim \hat{A}_{16,n}$ は定数である。なお, T_j^{*}, T_j^{**} の内容および余関数 $\widetilde{\phi}^{\mathrm{III}}$ については紙面の都合上省略した。

5. おわりに

詳細および数値計算例は当日発表する。

(参考文献)(1) Hirashima & Iura: Theoretical & Appl. Mech. Vol.29